DM n°10

A rendre vendredi 19 janvier 2007

PROBLEME : Ensemble des couples (x, y) tels que $x^x = y^y$

On notera E l'ensemble des couples de réels (x, y) tels que $x > 0,\ y > 0,\ x \neq y$ et $x^x = y^y$.

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0,\ f(x) = x\ln(x)$.
   Etudier les variations de f et tracer sa représentation graphique.

2. On note f_1 la restriction de f à $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ et f_2 la restriction de f à $\left]\frac{1}{e}; 1\right[$. Déterminer l'ensemble de définition de f_1^{-1} et f_2^{-1} (aprés avoir justifié leur existence ...), et montrer que sur cet ensemble f_1^{-1} et f_2^{-1} sont C^∞.

3. Montrer que tout $(x, y) \in E$ vérifie $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$.
   Montrer que pour tout $x \in]0; 1[- \left\{\frac{1}{e}\right\}$ il existe un unique réel y tel que $(x, y) \in E$.
   On notera $\varphi(x)$ ce réel y, et on désignera par φ_1 et φ_2 les restrictions de φ respectivement à $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ et $\left]\frac{1}{e}; 1\right[$.
   Montrer $\varphi_1 = f_2^{-1} \circ f_1$ et exprimer φ_2 en fonction de f_1 et f_2.

4. Montrer que φ est indéfiniment dérivable sur chaque intervalle $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ et $\left]\frac{1}{e}; 1\right[$, et montrer :

$$\forall x \in]0; 1[- \left\{\frac{1}{e}\right\},\ \varphi'(x) = \frac{1 + \ln x}{1 + \ln(\varphi(x))}\ .$$

5. Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0 et en 1.
   Etudier alors la dérivabilité en 1.
   Déterminer $\lim\limits_{0} \varphi'(x)$. Qu'en conclure ?

6. Montrer que φ est prolongeable par continuité en $\frac{1}{e}$.
   On admettra que φ est dérivable en $1/e$ de dérivée -1.

7. Etudier les variations de φ. Déterminer un axe de symétrie de E. Tracer une allure de E.

Exercice

Soient f et g deux fonctions définies sur $I = [a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivables sur I, et telles que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f'(a) > g'(a)$ et $f'(b) > g'(b)$.
Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un élément c de $]a; b[$ tel que $f(c) = g(c)$.

1. Soit $\varphi = f - g$. Montrer : $\exists h > 0, \forall x \in]a; a + h[\subset]a; b[,\ \dfrac{\varphi(x)}{x - a} > 0$.

2. Adapter la question au voisinage de b.

3. Conclure.