

A rendre jeudi 15 février 2007

Problème : Etude des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$, densité

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. On pose $G_+^* = G \cap \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que G_+^* est non vide.
Montrer que G_+^* admet une borne inf, qu'on notera par la suite a . Donc $a \geq 0$.
 2. Etude du cas $a > 0$.
 - (a) Supposons qu'il existe un élément x de G dans $]a; 2a[$ (1)
Montrer qu'il existe alors un élément x' de G dans $[a; x[$.
En considérant le réel $x - x'$, montrer que l'hypothèse (1) aboutit à une contradiction. Qu'en déduire ?
 - (b) Montrer que $a \in G$.
 - (c) Montrer que l'ensemble $a\mathbb{Z} = \{an / n \in \mathbb{Z}\}$ est inclus dans G .
 - (d) Le but de cette question est de montrer que $a\mathbb{Z} = G$.
Soit $t \in G_+^*$ et posons $n = E\left(\frac{t}{a}\right)$.
En considérant le réel $t - na$, montrer que $t = na$. Conclure.
 3. Supposons $a = 0$. On va montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
Rappel : G est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow \exists t \in G$ tel que $x < t < y$.
 - (a) Soient λ et μ deux réels tels que $\lambda < \mu$. Montrer qu'il existe un élément g de G tel que $0 < g < \mu - \lambda$.
 - (b) Montrer que l'ensemble des entiers relatifs n vérifiant $n > \frac{\lambda}{g}$ admet un plus petit élément que l'on notera n_0 .
 - (c) Montrer que $n_0 g \in]\lambda; \mu[$.
 - (d) Conclure.
 4. Qu'a-t-on démontré sur les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$?
 5. Application (Réserve à Noel et Jacquemot): Soit α un réel. Notons $\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + ab / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.
 - (a) Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
 - (b) Supposons α irrationnel. Montrer que si $\mathbb{Z}[\alpha] = x_0\mathbb{Z}$ alors x_0 est rationnel. En déduire une contradiction (on pourra considérer successivement les réels 1 et α)
 - (c) Qu'en déduire pour $\mathbb{Z}[\alpha]$ lorsque α est irrationnel. ?
 - (d) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan. On note (Γ) le cercle trigonométrique, et M_θ le point de (Γ) tel que l'angle $(\vec{i}, O\vec{M})$ a pour mesure θ .
Montrer que l'ensemble $E_\mathbb{Z} = \{M_n / n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans (Γ) , c'est à dire :

$$\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \theta < \theta' \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} / \text{l'angle } (\vec{i}, O\vec{M}_n) \text{ a une mesure comprise entre } \theta \text{ et } \theta'.$$
- (On pourra considérer l'ensemble $\mathbb{Z}[2\pi]$)
- (e) Montrer que l'ensemble $F = \{\cos(n)/n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1; 1]$.
6. Soit H un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}_+^*$. A l'aide d'un morphisme de groupes bien choisi, montrer que :
 - soit il existe $\alpha > 0$ tel que $H = \{\alpha^n / n \in \mathbb{Z}\}$
 - soit H est dense dans $\mathbb{R}_+^*$.