DM n°12

A rendre vendredi 16 mars 2007

Problème : Polynômes d'interpolation de Lagrange

1 Les polynômes d'interpolation

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ (par convention $deg(0) = -\infty$).
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de points de I deux à deux distincts.
Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. On appelle polynôme d'interpolation de f relativement aux points $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, un polynôme P tel que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, P(x_i) = f(x_i)$.

1. Le but de cette question est de montrer que dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ il existe un et un seul polynôme d'interpolation de f relativement aux points $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
   (a) Montrer l'unicité d'un tel polynôme.
   (b) Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. On pose $P_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$. Calculez $P_i(x_k)$ pour $k \neq i$, puis pour $k = i$.
   (c) Soit $L = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)P_i$. Montrer que $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, L(x_k) = f(x_k)$. Conclure.
   Ce polynôme L, de degré strictement inférieur au nombre n de points est appelé **polynôme d'interpolation de Lagrange relativement à la famille** $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$..
2. Exprimer tous les polynômes d'interpolation de f en fonction de L. (on pourra considérer $P - L$ où P est un polynôme d'interpolation de f)
3. Soit P un polynôme de degré strictement inférieur à n. Montrer que :
$$P = \sum_{i=1}^{n} \left(P(x_i) \prod_{j=1,\ j\neq i}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right) .$$
4. Soit $f(x) = x^3 - 1$ et $x_i = 2\frac{i-1}{n-1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Calculer selon les différentes valeurs de n le polynôme d'interpolation de Lagrange relativement à la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
5. Le but de cette question est de trouver un majorant de $\{|f(x) - L(x)| \,/\, x \in I\}$, afin d'estimer l'erreur que l'on commet si on remplace f par son polynôme d'interpolation de Lagrange
   On suppose dans toute cette question que f est de classe C^n.
   Soit $x \in I$, avec x distinct de tous les x_i.
   Soit enfin g_x la fonction définie par : $g_x : t \to f(t) - L(t) - \Big(f(x) - L(x)\Big) \prod_{i=1}^{n} \frac{t - x_i}{x - x_i}$.
   (a) Montrer que g_x est de classe C^n.
   (b) Montrer que g_x admet au moins $n + 1$ zéros.
   (c) En déduire que $g_x^{(n)}$ s'annule en au moins un point α de I.
   (d) Calculer $g_x^{(n)}(t)$.
   (e) Soit $\mu = \operatorname{Sup}_{x\in I} \left|f^{(n)}(x)\right|$. Montrer que : $\forall x \in I$, $|f(x) - L(x)| \leqslant \frac{\mu}{n!} \prod_{i=1}^{n} |x - x_i|$.
   (f) Etudier le cas particulier où $f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$. Qu'en déduire ?

2 Quelques applications (les questions 1, 2, 3 sont indépendantes)

1. On cherche l'ensemble des polynômes P tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

   (a) Montrer que cet ensemble est non vide.

   (b) Soit P un tel polynôme et n son degré. En utilisant la famille de $n+1$ entiers $x_k = k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, montrer que : $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \Rightarrow P \in \mathbb{Q}[X]$.

   (c) Conclure.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\epsilon = e^{i2\pi/n}$.

   (a) Calculer $1 + \epsilon + \epsilon^2 + \cdots + \epsilon^{n-1}$.

   (b) Montrer : $(1-\epsilon)(1-\epsilon^2)(1-\epsilon^3)\dots(1-\epsilon^{n-1}) = n$ (on pourra décomposer $X^n - 1$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$).

   (c) Soit i un entier fixé avec $i < n$. Montrer que :
   $(\epsilon^i - \epsilon)(\epsilon^i - \epsilon^2)\dots(\epsilon^i - \epsilon^{i-1})(\epsilon^i - \epsilon^{i+1})\dots(\epsilon^i - \epsilon^n) = n\epsilon^{-i}$.

   (d) Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Comparer P et $\sum\limits_{i=0}^{n-1} P(\epsilon^i)\dfrac{1 - X^n}{1 - X\epsilon^{-i}}$ (on pourra utliser I.3.)

   (e) En déduire : $nP(0) = P(1) + P(\epsilon) + \cdots + P(\epsilon^{n-1})$.

   (f) En considérant $P = X^n - 1$, montrer que cette relation n'est pas forcément valable si P est de degré supérieur ou égal à n.

3. On pose ici $I = \mathbb{R}^+$, $a_i = i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   (a) Montrer : $\forall x \in I$, $L_n(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1 - \dfrac{x}{i}\right)$ où L_n est le polynome d'interpolation de Lagrange associé à f relativement à la famille de points $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

   (b) Montrer : $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $-2x \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x$ (attention, ici il s'agit de la fonction logarithme népérien (ln) à ne pas confondre avec le polynôme d'interpolation de Lagrange (L_n)).

   (c) On rappelle (on ne vous demande pas de le redémontrer) que pour tout entier N, la suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ définie par $u_n = \sum\limits_{i=N}^{n} \dfrac{1}{i}$ a pour limite $+\infty$.
   Soit x un réel positif tel que $x \notin \mathbb{N}$, exprimer $\ln\left(|1 - xL_n(x)|\right)$ comme une somme.
   En introduisant dans cette somme l'indice $N = \mathrm{E}(2x)$, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(|1 - xL_n(x)|\right) = -\infty$

   (d) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.