DM n°13

A rendre vendredi 25 mars 2007

L'objet du problème, développé dans la partie 3 est l'obtention de valeurs approchées du nombre π.
Dans toute la suite, on désigne par n un entier naturel et par a un nombre réel supérieur ou égal à 1. On notera aussi, pour simplifier les écritures : $b = a^2 + 1$.

Partie 1 : étude d'intégrales.

1. On désigne par p, q des entiers naturels et l'on étudie l'intégrale :

$$I(p,q) = \int_0^1 t^{2p}(1-t^2)^q dt \ .$$

   (a) On suppose $q \geqslant 1$. Former une relation de récurrence entre $I(p,q)$ et $I(p+1,q-1)$.

   (b) En déduire l'expression à l'aide de factorielles de l'intégrale $I(p,q)$, et en particulier vérifier que l'intégrale $I(p,p)$ que l'on notera $J(p)$ vaut :

$$J(p) = \frac{2^{2p}((2p)!)^2}{(4p+1)!} \ .$$

   (c) En étudiant le maximum sur $[0;1]$ de $t \to t^2(1-t^2)$, établir : $0 \leqslant J(p) \leqslant \frac{1}{4^p}$.

2. Soit $f(a) = \int_0^{1/a} \frac{dt}{1+t^2}$.

   (a) Établir, pour $a \neq 1$ l'égalité suivante :

$$f(a) + f\left(\frac{a+1}{a-1}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

   (on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = \frac{ax-1}{x+a}$).

   (b) Établir : $f(a) = a\int_0^1 \frac{dt}{a^2+t^2}$.

Partie 2 : étude d'une suite de polynômes.

On considère les polynômes $P_n = 1 + \lambda_n X^n(1-X)^n$.

1. Déterminer le réel λ_n pour que $-a^2$ soit racine de P_n.
   En déduire qu'il existe alors un polynôme Q_n tel que $P_n = (X+a^2)Q_n$.
   Dans toute la suite du problème on supposera λ_n ainsi choisi.

2. (a) Expliciter Q_0 et Q_1.

   (b) Établir : $Q_{n+1} - Q_n = \left(-\frac{X(1-X)}{a^2 b}\right)^n Q_1 \qquad (2)$
   En déduire l'expression de Q_2.

Partie 3 : détermination de valeurs approchées de π.

1. Une première approximation de π.
   On pose :
   $$u_n(a) = a\int_0^1 Q_n(t^2)dt \ .$$
   (a) Calculer les valeurs de $u_1(a)$ et $u_2(a)$.
   (b) Vérifier que :
   $$u_2(a) = a\int_0^1 \frac{P_2(t^2)}{a^2+t^2}dt \ .$$
   En déduire la double inégalité :
   $$u_2(a) + \frac{J(2)}{a^3b^3} \leqslant f(a) \leqslant u_2(a) + \frac{J(2)}{a^5b^2} \ .$$
   (c) Donner un encadrement décimal de $f(2)$ et $f(3)$ (avec les 6 premières décimales).
   (d) A l'aide de la relation (1), en déduire une valeur décimale approchée du nombre π (avec les 6 premières décimales).

2. Généralisation.
   (a) Établir l'inégalité suivante :
   $$|u_n(a) - f(a)| \leqslant \frac{1}{(4a^2b)^n a} \qquad (3) \ .$$
   (b) Établir à l'aide de l'égalité (2) que :
   $$u_{n+1}(a) - u_n(a) = \frac{(-1)^n aJ(n)}{(a^2b)^{n+1}} \frac{2(2b-1)n+3b-1}{4n+3} \ .$$
   (c) On pose $v_n(a) = u_{n+1}(a) - u_n(a)$.
   Exprimer pour $n \geqslant 1$ le rapport $\dfrac{v_{n+1}(a)}{v_n(a)}$ en fonction de n et de a.
   (d) On donne un entier naturel n et un nombre réel a supérieur ou égal à 1.
   Rédiger en MAPLE : une procédure de calcul de $u_k(a)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ (on utilisera la suite $(v_k(a))$).
   En déduire en MAPLE une procédure de calcul d'une valeur approchée de π (on utilisera la relation (1)).
   (e) On choisit $n = 5$ et $a = 2$. A l'aide de MAPLE, donner une valeur rationnelle de $u_5(2)$ et $u_5(3)$. Quelle valeur approchée de π obtient-on ainsi ?
   Indiquer à l'aide de l'inégalité (3) la précision de cette approximation.

3. recherche du choix optimal pour a.
   On suppose dans cette question $a > 1$, et on pose : $w_n(a) = 4\left[u_n(a) + u_n\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)\right]$.
   (a) Soit $c = \min\left(a, \dfrac{a+1}{a-1}\right)$. Montrer : $|w_n(a) - \pi| \leqslant \dfrac{8}{c[4c^2(1+c^2)]^n}$.
   (b) Déterminer pour quelle valeur a_0 de a le nombre c est maximal.
   (c) On choisit $a = 5/2$. Donner un majorant de $|w_n(a) - \pi|$. Qu'obtient alors pour $n = 5$?