

PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note Φ_A l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A .

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$. Dans ce cas, on appelle indice de A le plus petit entier p tel que $A^p = 0$.

On note :

$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ nilpotentes} \}$.

$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ triangulaires supérieures} \}$.

$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } A - I \in \mathcal{N}\}$.

$E_k = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_k)$.

$E_0 = \{0\}$.

1. (a) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{T}$ si et seulement si pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, E_k est stable par Φ_A .
 (b) Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 (c) Soit $A \in \mathcal{T}$. Montrer :

$$A \in GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \Phi_A(E_k) = E_k$$

 (d) Montrer : $A \in \mathcal{T} \cap GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{T}$.
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{T}$ dont les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont tous nuls.
 (a) Montrer que pour tout k , $\Phi_A(E_k) \subset E_{k-1}$.
 (b) Montrer que A est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n .
 (c) Soit k entier, $k \geq 2$. Montrer que $\Phi_A^{k-1}(e_k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{i,i+1}\right)e_1$.
 (d) Montrer que l'indice de A est exactement n si et seulement si les coefficients $a_{i,i+1}$ (avec $1 \leq i \leq n-1$) sont tous non nuls.
3. Soit $A \in \mathcal{N}$.
 (a) Montrer que A est non inversible.
 (b) Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que PAP^{-1} est nilpotente de même indice que A .
 (c) Montrer que $\text{Im}(\Phi_A)$ est distinct de E .
 (d) Montrer qu'il existe une base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de E dans laquelle la matrice de Φ_A a sa dernière ligne nulle.
 (e) Montrer par récurrence qu'il existe une base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de E dans laquelle la matrice de Φ_A est triangulaire supérieure à diagonale nulle.
 (f) Que peut-on en déduire pour l'indice de A et pour A^n ?
 (g) Pour $n = 2$ trouver une matrice nilpotente non triangulaire.
4. Soient $A, B \in \mathcal{N}$ telles que $AB = BA$.
 (a) Montrer que $A + B \in \mathcal{N}$.
 (b) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, que vaut $(A + \lambda B)^n$?
 (c) Montrer : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, A^{n-k}B^k = 0$ (on considérera le coefficient ligne i colonne j de la matrice $(A + \lambda B)^n$).
 (d) En déduire que si p et q sont deux entiers naturels tels que $p + q \geq n$ alors $A^pB^q = 0$.
5. Pour $A \in \mathcal{N}$ on pose $\exp(A) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}$.
 (a) Montrer que $\exp(A) \in \mathcal{U}$.
 (b) Soient $A, B \in \mathcal{N}$ telles que $AB = BA$.
 Montrer que $\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B)$
 (c) En déduire que $\exp(A)$ est inversible et donner son inverse.