DM n°15

A rendre jeudi 26 avril 2007

Problème.

n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Une matrice T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite tridiagonale symétrique si et seulement si

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & . & & \\ 0 & b_2 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & . & . & 0 \\ . & & & . & . & . & b_{n-1} \\ 0 & . & . & . & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Première partie : Quelques propriétés des matrices tridiagonales symétriques.

On désigne par $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices tridiagonales symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on précisera une base et la dimension.
2. Pour $n \geqslant 4$ soit la famille :

$$T_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_2 \end{pmatrix} \quad , \quad T_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad , \quad T_4 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \ldots T_n.$$

   On note D_i le déterminant de T_i pour $2 \leqslant i \leqslant n$. Calculer D_n en fonction de D_{n-1}, D_{n-2}, a_n et b_{n-1}.

3. En déduire les déterminants des éléments des deux familles suivantes :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & & & \\ 2 & 5 & 2 & & & 0 \\ & . & . & . & & \\ & & . & . & . & \\ & & & . & . & . \\ & & 0 & & . & . & 2 \\ & & & & & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad , \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \quad , \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix} \quad , \quad B_n = \begin{pmatrix} 1 & 4 & & & & \\ 4 & 10 & 4 & & & 0 \\ & . & . & . & & \\ & & . & . & . & \\ & & & . & . & . \\ & & 0 & & . & . & 4 \\ & & & & & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Deuxième partie : Résolution d'un système à matrice tridiagonale symétrique associée.

1. Déterminer la matrice L triangulaire inférieure de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ à coefficients positifs telle que :

   $L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e & b & 0 & 0 \\ 0 & f & c & 0 \\ 0 & 0 & g & d \end{pmatrix}$ et $L.{}^tL = A_4$ où A_4 est la matrice définie au I.3.

2. Montrer que la résolution d'un système linéaire d'ordre 4 écrit sous forme matricielle : $A_4.X = B$ se ramène à la résolution successive de deux systèmes linéaires d'ordre 4 à matrices triangulaires associées. (*X désigne la matrice colonne des quatre inconnues, B désigne la matrice colonne des quatre constantes du second membre.*)

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$, en appliquant uniquement la méthode précédente, le système linéaire suivant :
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -9 \\ 2x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

Troisième partie : Tridiagonalisation d'une matrice symétrique

On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel . dans la base $\mathcal{B}$

1. On considère les endomorphismes f et r' de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices associées dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{5} & -\frac{4\sqrt{2}}{5} & \frac{4\sqrt{2}}{5} \\ \frac{6}{5} & 5 & -\frac{\sqrt{2}}{5} & -\frac{\sqrt{2}}{5} \\ -\frac{4\sqrt{2}}{5} & -\frac{\sqrt{2}}{5} & \frac{11}{5} & 0 \\ \frac{4\sqrt{2}}{5} & -\frac{\sqrt{2}}{5} & 0 & \frac{39}{5} \end{pmatrix} \qquad R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c' & -s' \\ 0 & 0 & s' & c' \end{pmatrix}$$

   (a) déterminer les réels positifs c' et s' tels que : $\begin{cases} {}^tR'.R' = I_4 \\ (f \circ r')(e_3).e_1 = 0 \end{cases}$ (I_4 désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$)

   (b) Calculer alors : $F' =^t R'FR'$. On notera f' l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à F' dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soit r'' l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice associée dans la base $\mathcal{B}$: $R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c'' & 0 & -s'' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s'' & 0 & c'' \end{pmatrix}$.

   (a) déterminer les réels positifs c'' et s'' tels que : $\begin{cases} {}^tR''R'' = I_4 \\ (f' \circ r'')(e_4).e_1 = 0 \end{cases}$.

   (b) Calculer alors : $F'' =^t R''F'R''$. Exprimer F en fonction de A_4, R' et R''

Quatrième partie : Résolution d'un système linéaire à matrice symétrique associée.

En utilisant les résultats des deuxième et troisième parties, résoudre le système linéaire suivant dans $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{6}{5}x_2 - \frac{4\sqrt{2}}{5}x_3 + \frac{4\sqrt{2}}{5}x_4 = 5 \\ \frac{6}{5}x_1 + 5x_2 - \frac{\sqrt{2}}{5}x_3 - \frac{\sqrt{2}}{5}x_4 = \frac{22}{5} \\ -\frac{4\sqrt{2}}{5}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{5}x_2 + \frac{11}{5}x_3 = -\frac{33\sqrt{2}}{5} \\ \frac{4\sqrt{2}}{5}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{5}x_2 + \frac{39}{5}x_4 = -\frac{12\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

Problème 2 **facultatif, sauf pour CUVILLIER, NOEL, JACQUEMOT**

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment I.
Soit $a \in I$ et $F : x \to \int_a^x f(t)dt$.

Dans la copie d'un élève on a pu lire cela : "F est dérivable sur I si et seulement si f est continue sur I".
Qu'en pensez-vous ? (Soyez le plus complet possible, ... et justifier)