

DM n°16

A rendre jeudi 10 Mai 2007

(pour ceux qui ne passent pas les mines)

Exercice

Soient A , B , C trois matrices carrées non nulles telles que $ABC = 0$.
Montrer que deux au moins de ces trois matrices ne sont pas inversibles.

Problème

On considère une fonction f à valeurs réelles positives, de classe C^1 sur le segment $[-2; -1]$ et vérifiant la relation $f'(-1) = f(-2)$.
On se propose dans ce problème de la prolonger en une fonction F à valeurs réelles de classe C^1 et vérifiant la relation $F'(x) = F(x - x^2)$ pour $x \geq -1$.

La partie III est indépendante de la partie II, sauf pour sa dernière question.

Partie I

1. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = x - x^2$. Etablir à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé que ψ induit une bijection de $] -\infty; 0]$ sur un intervalle à préciser.
2. On considère la suite (x_n) de premier terme $x_0 = -2$ et définie pour $n \geq 1$ par : $x_n - x_n^2 = x_{n-1}$ et $x_n < 0$.
 - (a) Déterminer x_1 et x_2 et montrer que la suite (x_n) est bien définie de manière unique.
 - (b) On pose pour tout entier naturel n :

$$u_n = x_{n+1} - x_n \quad v_n = \ln(1 + u_n) , \quad w_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_n) .$$

Prouver que $\sum_{k=0}^n u_k$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$ et donner cette limite.

Prouver que $\sum_{k=0}^n v_k$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$ et donner un majorant de cette limite.

Prouver la convergence de la suite (w_n) et montrer : $2 \leq \lim(w_n) \leq 9$.

Partie II

Le but de cette partie est de résoudre le problème $P0$ suivant :

Montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $F : [-2; 0] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les 3 propriétés suivantes :

- i) F est de classe C^1 sur $[-2; 0]$.
- ii) $\forall x \in [-2; -1], F(x) = f(x)$.
- iii) $\forall x \in [-1; 0], F'(x) = F(x - x^2)$.

1. Unicité d'une éventuelle solution.

On suppose qu'il existe une fonction F solution de $P0$.

- (a) Montrer : $t \in [x_n; x_{n+1}] \Rightarrow t - t^2 \in [x_{n-1}, x_n]$.
- (b) Montrer : $x \in [x_1; x_2] \Rightarrow F(x) = f(x_1) + \int_{x_1}^x f(t - t^2) dt$.
- (c) Montrer que pour $n \geq 2, x \in [x_n; x_{n+1}] \Rightarrow F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^x F(t - t^2) dt$.
En déduire que la connaissance de F sur $[x_{n-1}; x_n]$ détermine F sur $[x_n; x_{n+1}]$.
- (d) Déterminer $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [x_n; x_{n+1}]$.
En déduire que s'il existe une solution F au problème $P0$ alors elle est unique.

2. Existence d'une solution F .

On construit sur I une fonction F de la façon suivante :

la fonction F est égale à f sur $[-2; -1]$ puis, la supposant ensuite connue sur $[x_{n-1}; x_n]$ pour $n \geq 1$, on pose pour tout réel x de $[x_n; x_{n+1}]$: $F(x) = F(x_n) + \int_{x_n}^x F(t - t^2) dt$.

- (a) Montrer que pour tout entier naturel n la fonction F est de classe C^1 sur $[x_n; x_{n+1}]$ et préciser $F'(x)$ en fonction de F et de x . Préciser les dérivées à droite et à gauche de F en x_1 , puis, de façon générale, en x_n . En déduire que la fonction F est de classe C^1 sur I .

- (b) Etudier le sens de variation de F sur $[x_1; x_2]$ puis montrer que F est croissante sur $[-1, 0[$.
- (c) On note M le maximum de la fonction positive f sur $[-2; -1]$. Etablir, pour tout réel x appartenant à $[-2, x_{n+1}]$, que $0 \leq F(x) \leq M \frac{w_n}{2}$.
En déduire que la fonction F est majorée sur $[-2; 0[$.
- (d) Etablir que $F(x)$ admet une limite L quand x tend vers 0. On pose alors $F(0) = L$. Prouver que F est de classe C^1 sur $[-2, 0]$ (on précisera $F'(0)$), puis que F est solution du problème $P0$.
3. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f le nombre L est-il nul ?

Partie III

Le but de cette partie est de résoudre le problème $P1$ suivant :

Montrer l'existence et l'unicité d'une fonction $F : [-2; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les 3 propriétés suivantes :

- i) F est de classe C^1 sur $[-2; 1]$.
 ii) $\forall x \in [-2; -1], F(x) = f(x)$.
 iii) $\forall x \in [-1; 1], F'(x) = F(x - x^2)$.

On introduit à cet effet les notations suivantes :

E désigne l'ensemble des fonctions réelles g de classe C^1 sur $[0; 1]$ telles que : $\forall x \in [0; 1], g'(x) = g(x - x^2)$.

φ désigne l'application associant à tout élément g de E le nombre réel $g(0)$.

1. Question préliminaire :

Soit $x \in [0; 1]$. On considère la suite $s_n(x) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (a) Etudier les variations de la suite $s_n(x)$.
 (b) Montrer, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n(x)) = e^x$.

2. Propriétés de l'application φ .

- (a) Prouver que E est un espace vectoriel et que l'application φ est linéaire sur E .
 (b) Soit g un élément du noyau de φ et M le maximum de la fonction $|g|$ sur $[0; 1/4]$.
 Montrer : $\forall x \in [0; 1], |g(x)| \leq Mx$.
 En déduire que $M = 0$. Conclure sur le noyau de φ .

3. Etude d'une suite de fonctions.

On définit une suite de fonctions (g_n) de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ en posant $g_0(x) = 1$, puis pour tout entier $n \geq 1$, et tout réel x de $[0; 1]$: $g_n(x) = 1 + \int_0^x g_{n-1}(t - t^2) dt$.

- (a) Calculer $g_1(x)$ et $g_2(x)$. Etablir que g_n est une fonction polynôme. Notant d_n son degré, exprimer d_n en fonction de n .
 (b) Soit $x \in [0; 1]$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq g_{n+1}(x) - g_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
 (c) En déduire, pour tout réel $x \in [0; 1]$, que la suite $(g_n(x))_n$ est convergente. On conviendra de noter sa limite $g(x)$ (g est donc une application de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$).

4. Etude de la fonction g .

- (a) Montrer : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \forall x \in [0; 1], 0 \leq g_{n+p}(x) - g_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^k}{k!}$.
 En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], 0 \leq g(x) - g_n(x) \leq e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

- (b) Etablir l'inégalité suivante pour tout couple (x, h) de réels tels que x et $x + h$ appartiennent à $[0; 1]$:

$$|g(x+h) - g(x)| \leq 2\left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right) + |g_n(x+h) - g_n(x)|.$$

En déduire, par un choix convenable de n puis de h que $|g(x+h) - g(x)|$ peut-être rendu inférieur à tout nombre $\varepsilon > 0$ donné à l'avance. En déduire que g est continue sur $[0; 1]$

- (c) Montrer $\forall x \in [0; 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x g(t - t^2) dt - \int_0^x g_n(t - t^2) dt \right) = 0$.
 En déduire : $g(x) = 1 + \int_0^x g(t - t^2) dt$.

- (d) Prouver que g est élément de E tel que $\varphi(g) = 1$.

5. Résolution du problème $P1$.

- (a) Déduire des questions précédentes que φ est bijective, et donner la dimension de E .
 (b) Déduire des parties II et III qu'il existe une et une seule fonction F solution du problème $P1$.