

A rendre vendredi 25 mai 2007

EXERCICE

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E un espace vectoriel euclidien de dimension n .

On appellera similitude de E toute application u de E dans E telle qu'il existe un réel a non nul tel que : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, u(\vec{x}) \cdot u(\vec{y}) = a\vec{x} \cdot \vec{y}$.

L'ensemble des similitudes de E est noté $Sim(E)$.

1. Vérifier que les homothéties non nulles et les isométries vectorielles de E sont des similitudes de E .
2. Soit u une similitude de E . Montrer qu'il existe un seul réel a non nul tel que $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, u(\vec{x}) \cdot u(\vec{y}) = a\vec{x} \cdot \vec{y}$.
Montrer que ce réel a est strictement positif.
Dans toute la suite, on notera k_u la racine carrée du réel a trouvé ici, et on l'appellera le rapport de la similitude u .
3. Soit u une similitude de rapport k_u .
 - (a) Soit $\vec{x}, \vec{y} \in E$. Calculer $(u(\vec{x} + \vec{y}) - u(\vec{x}) - u(\vec{y}))^2$.
 - (b) Montrer que u est un endomorphisme de E .
 - (c) Montrer que u est un automorphisme de E .
4. Montrer que $Sim(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.
5. Soit u une similitude de E de rapport k_u .
Prouver l'existence et l'unicité d'une isométrie vectorielle v de E telle que $u = k_u v$.
Cette application v est appelée l'isométrie vectorielle associée à la similitude u . On la notera v_u .
6. Une similitude u de E est dite directe quand son isométrie vectorielle associée est droite.
Si u est une similitude de E , montrer qu'elle est directe si et seulement si son déterminant est strictement positif.

PROBLEME

Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée usuelle et rapporté à sa base canonique orthonormée directe notée (e_1, e_2, e_3) .

On notera I_3 la matrice identité.

Il est demandé de faire figurer tous les calculs sur la copie.

Partie I

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$, $e'_3 = (1, 1, -2)$.
 - (a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - (b) Déterminer la matrice S' de s dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) .
 - (c) Calculer $(S')^n$ et donner une méthode de calcul de S^n (on ne demande pas d'effectuer lesdits calculs).

3. (a) La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- (b) Montrer que S^2 peut s'exprimer sous forme de combinaison linéaire de I_3 et S . Déterminer S^{-1} .
- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que $S^n = a_n I_3 + b_n S$ (on convient que : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), M^0 = I_3$).
- (d) Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1 , et exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
- (e) Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, puis que la suite $(b_n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
- (f) En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. On pose $u = f \circ s^{-1}$ et on note U la matrice de u dans la base canonique.

1. Calculer U (on trouvera $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$); vérifier que u est un endomorphisme orthogonal direct, et que $u \circ s = s \circ u = f$.
2. Soit (e''_1, e''_2, e''_3) la famille obtenue en normant les vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3 de la question I.2).
 - (a) Montrer que (e''_1, e''_2, e''_3) est une base orthonormale directe.
 - (b) Ecrire la matrice U' de u dans cette base.
 - (c) On note u_1 la restriction de u au plan $P = \text{Vect}(e''_2, e''_3)$, orienté par la donnée de (e''_2, e''_3) . Reconnaitre u_1 .
3. (a) Exprimer la matrice de s dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) en fonction de S' .
- (b) En déduire la matrice de f dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) .
4. (a) Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par f ?
- (b) Soit $P = \text{Vect}(e''_2, e''_3)$.
 - i. Montrer que $f(P) = P$.
 - ii. Soit g l'endomorphisme de P tel que pour tout x de P , $g(x) = f(x)$. Montrer que g est la composée d'une homothétie et d'une rotation à préciser.
5. On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f , c'est à dire l'ensemble des endomorphismes g tels que $g \circ f = f \circ g$.
 - (a) Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $L(\mathbb{R}^3)$.
 - (b) Soit $g \in C(f)$.
 - i. Montrer que le vecteur $g(e''_1)$ est invariant par f . Que peut-on en déduire ?
 - ii. Soit M la matrice de g dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) . Montrer que M commute avec $(S')^3$.
 - iii. En déduire la forme générale de la matrice d'un endomorphisme de $C(f)$ dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) .
 - (c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $C(f)$?