DM n°19

A rendre vendredi 16 juin 2007

PROBLEME : A propos des fonctions harmoniques

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On appelle Laplacien de f la fonction notée Δf définie par : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
On dit que f est harmonique sur U si et seulement si : $\forall (x,y) \in U$, $\Delta f(x,y) = 0$.

1. Déterminer Δf dans les cas suivants :
   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $(x,y) \neq (0,0)$.
   (b) $f(x,y) = \text{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ et $U = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
   (c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ et $(x,y) \neq (0,0)$.
2. Dans toute cette question on pose $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
   On pose $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ et $f(x,y) = F(\rho,\theta)$.
   (a) Exprimer Δf en fonction de ρ et θ et des dérivées partielles de F (on trouvera $\Delta f = \dfrac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial F}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$). Retrouver ainsi le résultat du 1.a.
   (b) On recherche toutes les fonctions harmoniques f telles que $f(x,y) = F(\rho,\theta)$ ne dépend pas de θ, dépend seulement de ρ, c'est à dire telles que $F(\rho,\theta) = G(\rho)$.
      i. Déterminer les fonction G de ce type.
      En déduire les fonctions f harmoniques sur U du type annoncé.
      ii. retrouver ainsi le résultat du 1.b.
3. (a) Soit φ, ψ, φ_1, ψ_1 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi x)\psi(y) = \varphi_1(x)\psi_1(y)$, avec φ et ψ_1 ne sont pas la fonction nulle.
   <u>Démontrer</u> qu'il existe une constante λ telle que $\varphi_1 = \lambda\varphi$ et $\psi = \lambda\psi_1$.
   (b) Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de classe C^2. On pose $f(x,y) = u(x)v(y)$.
   Déterminer les fonctions f de ce type harmoniques.
4. Soient φ et ψ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$, de classe C^2. On dit que ψ est associée à φ si et seulement si : $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$.
   (a) Déterminer toutes les fonctions ψ associées à la fonction φ définie par $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$.
   (b) Montrer que si φ admet une fonction associée ψ, alors φ et ψ sont harmoniques ainsi que leur produit.
   Montrer sans aucun calcul que la fonction $f : (x,y) \to x^3y - xy^3$ est harmonique.
   (c) Soit H une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^2$ et φ et ψ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ avec ψ associée à φ.
   Montrer que la fonction $(x,y) \to H(\varphi(x,y), \psi(x,y))$ est harmonique.
   En déduire sans calcul que : $(x,y) \to \text{Arctan}\dfrac{2xy}{y^2-x^2}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = y^2\}$
5. Soit $\varphi :]-1;1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.
   On pose $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$ et f la fonction définie sur U par : $f(x,y) = \varphi\left(\dfrac{\cos 2x}{\text{ch}2y}\right)$.
   (a) Montrer que f est harmonique si et seulement si φ vérifie l'équation différentielle :
   $$(1-u^2)\varphi''(u) - 2u\varphi'(u) = 0 \quad \text{pour tout u} \in]-1;1[$$
   (b) Déterminer alors toutes les fonction f de ce type harmoniques.