DM n°2

A rendre jeudi 28 septembre 2006

Exercice 1

Soit M un point du plan d'affixe m avec $m \neq 0$. On note m_1 et m_2 les deux racines carrées de m, et M_1 le point image de m_1, M_2 le point image de m_2. Quel est l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{MM_1}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MM_2}$. ?

Exercice 2

1. Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(t) = \text{Arctan}t - t + \dfrac{t^3}{3}$.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant g'(t) \leqslant t^2$.
   (b) En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ t - \dfrac{t^3}{3} \leqslant \text{Arctan}t \leqslant t$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(0) = 1 \text{ et } \forall t \neq 0,\ f(t) = \frac{\text{Arctan}t}{t}\ .$$
   (a) Étudier la parité de f. Montrer que f est continue en 0. En déduire qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0, et donner $f'(0)$.
   (c) Calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.
3. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \displaystyle\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$.
4. En déduire le sens de variation de f.
5. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Problème

On considère l'espace affine euclidien orienté P. Soit O un point de P et k un réel non nul. On note E le plan P privé du point O ($E = P - \{O\}$).
Soit f l'application de E dans E qui à tout point M de E associe le point m de E défini par : $O,\ M,\ m$ sont alignés, et $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{Om} = k$.
Cette application f s'appelle l'inversion de pôle O et de rapport k.

Partie 1

1. Montrer que f est bien une application, c'est à dire montrer que pour tout M de E, il existe un et un seul point m de E tel que $O,\ M,\ m$ sont alignés, et $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{Om} = k$.
   Pour $M \in E$, déterminer $f(f(M))$.
2. Notons z l'affixe de M. Déterminer l'affixe z' de $m = f(M)$.
   Si M a pour coordonnées polaires (r, θ), donner les coordonnées polaires de $f(M)$.
   En déduire les coordonnées de $f(M)$ en fonction de celles de M.
   Déterminer les coordonnées de M en fonction de celles de $f(M)$.

Partie 2

1. (a) Notons (D) une droite "passant" par O et privée de O. Montrer que l'image par f de (D) est (D)
   (b) Soit (Δ) la droite d'équation $ax+by=c$ avec $c \neq 0$. Montrer que l'image de (Δ) par f est un cercle passant par O, privé de O.
   (c) Déterminer l'image d'un cercle passant par O (privé de O)
   (d) Montrer que l'image d'un cercle ne passant pas par l'origine est un cercle ne passant pas par O.

2. (a) Soient a et b deux nombres complexes. Montrer que $\left| a\dfrac{|b|}{|a|} - b\dfrac{|a|}{|b|} \right| = |a-b|$.
   (b) Soient M et N deux points du plan. On note $m = f(M)$ et $n = f(N)$.
   Montrer que $||\overrightarrow{mn}|| = |k| \dfrac{||\overrightarrow{MN}||}{||\overrightarrow{OM}|| \; ||\overrightarrow{ON}||}$

3. Soient A, B, C, trois points distincts tels que O, A, B, C sont cocycliques (sur un même cercle).
   Montrer que l'une des égalités suivantes est vérifiée :

$$\begin{cases} & AB \times OC + BC \times OA = AC \times OB \\ ou & AB \times OC + AC \times OB = BC \times OA \\ ou & AB \times OC = BC \times OA + AC \times OB \end{cases}$$

   On pourra utiliser la question 3. et la question 4., et considérer les positions respectives des images de A, B, C par f.

Partie 3

Dans cette partie on suppose $k = R^2$ où R est un réel strictement positif.
On notera (Γ) le cercle de centre O et de rayon R.

1. Montrer que pour tout point M de E,
   (a) Si M est sur Γ alors $f(M) = M$;
   (b) Si M est intérieur à (Γ), (i.e. $OM < R$ alors $f(M)$ est extérieur à $(gamma)$ (i.e. $Of(M) > R$).
   (c) Si M est extérieur à (Γ) alors $f(M)$ est intérieur à (Γ).

2. Soit M un point extérieur à (Γ).
   (a) Montrer qu'il existe exactement 2 tangentes à (Γ) passant par M.
   (b) Montrer que $f(M)$ est le milieu des points de contacts de ces 2 tangentes avec le cercle.
   (c) Si on possède seulement une règle non graduée et un compas, expliquer soigneusement comment construire $f(M)$ connaissant M.

3. Dans le cas où M est intérieur à (Γ), expliquer soigneusement comment construire $f(M)$ si on ne possède qu'une règle non graduée et un compas.