DM n°3

A rendre jeudi 5 octobre 2006

Exercice

Ces deux questions sont indépendantes.

1. On considère l'équation différentielle suivante :
$$(1-x)y' - y = \frac{1}{1+4x^2} \qquad (E)$$
Déterminer la solution de (E) qui s'annule pour $x = \sqrt{3}/2$.
2. On considère l'équation différentielle suivante :
$$y'' - 4y' + 5y = \sin(x) \qquad (F)$$
Déterminer la solution y de (F) qui s'annule en 0 et en $\pi/2$.

Problème : Équations différentielles linéaires du second ordre.

Partie A : un exemple.

On considère (dans cette partie seulement) l'équation différentielle (E) :
$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0 \qquad \text{sur } I =]1; +\infty[\ .$$

1. Montrer que la fonction y_1 définie sur I par $y_1 : x \to \dfrac{x}{1-x}$ est solution de (E).
2. Soit y une solution quelconque de (E). Notons z la fonction $z = \dfrac{y}{y_1}$.
   (a) Déterminer une équation différentielle que satisfait z.
   (b) En déduire les fonctions z puis l'ensemble des solutions de (E).

Partie B : une méthode de résolution générale lorsqu'on connaît déjà une solution.

Soit l'équation différentielle (E) définie sur l'intervalle I :
$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont dérivable sur } I.$$

Supposons connue une solution y_1 de (E) sur I telle que y_1 ne s'annule pas sur I.

1. Soit y une solution de (E). Notons z la fonction $z = \dfrac{y}{y_1}$. Montrer que z' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à déterminer.
2. Déterminer z' en fonction de A et y_1, où A est une primitive de a sur I.
3. Montrer qu'il existe une fonction y_2 dérivable sur I telle que :
$$\forall y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tels que } y = \lambda y_1 + \mu y_2 \ .$$

Remarque : cette technique de résolution suppose connue une fonction y_1 solution de (E).

Partie C : un exemple de recherche d'une solution de (E).

On considère ici l'équation différentielle (E) :
$$5y'' + (6-4x)y' + 8y = 0 \ .$$

On va montrer que (E) admet une solution polynômiale.
Soit donc $y : x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ une fonction polynomiale, avec $a_n \neq 0$ (donc $n = \deg(y)$).

1. Montrer que $5y'' + (6-4x)y' + 8y$ est une fonction polynomiale.
2. Quel est alors le coefficient de x^n dans $5y'' + (6-4x)y' + 8y$?
3. En déduire la valeur de n pour que y soit une solution de (E).
4. Montrer alors que (E) admet une solution polynomiale à déterminer.