DM n°4

A rendre jeudi 19 octobre 2006

Exercice 1

Soit l'équation différentielle linéaire suivante :

$$(1+x^2)y'' + xy' - k^2 y = 0 \qquad (1)$$

où k est un paramètre réel positif ou nul.

1. Résoudre cette équation dans le cas où $k = 0$.
2. On suppose $k > 0$. On pose alors $x = sh(\varphi)$. On notera alors z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall \varphi \in \mathbb{R}, z(\varphi) = y(sh(\varphi)) = y(x) \ .$$

   (a) Exprimer $z'(\varphi)$ en fonction de $y'(x)$ et de φ, et en déduire l'expression de $y'(x)$ en fonction de z' et de φ.
   (b) Montrer que z est solution d'une équation différentielle (2) à déterminer.
   (c) Résoudre l'équation différentielle (2), et en déduire la solution générale de l'équation (1).

Exercice 2

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, tracer, aprés étude, la courbe (C) d'équation polaire :

$$r = \frac{\cos(2\theta)}{2\cos(\theta) - 1}$$

Exercice 3

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$,on considère la courbe (C) définie par la représentation paramétrique :

$$x = 2\frac{\cos t}{2 - \sin 2t} \ , \qquad y = 2\frac{\sin^2 t}{2 - \sin 2t}$$

1. (a) Faire l'étude de la courbe.
   (b) Déterminer le point double A et les tangentes en ce point.
   (c) Déterminer les points d'intersection des tangentes menées de A avec la courbe.
   (d) Tracer la courbe
2. Montrer que toute droite (Δ) issue de O, autre que les axes, coupe (C) en deux points P et Q.
3. Montrer que le produit $\overline{OP}.\overline{OQ}$ garde une valeur constante quand (Δ) pivote autour de O.
4. .... Montrer que Q est l'image de P dans une inversion à déterminer (pour l'inversion, retourner voir le DM 2). Quelle est l'image de (C) par cette inversion ?