DM n°6

A rendre vendredi 24 novembre 2006

Problème

Soit a et δ deux réels de l'intervalle $]0;1[$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \delta u_n(1-u_n)$.

1. Préliminaire : Montrer que $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $1 - u_{n+1}$ en fonction de $1 - u_n$ et de $1 - \delta u_n$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - u_{n+1} \leqslant q(1-u_n)$ avec $q = 1 - a\delta$.
   (b) Déterminer un réel b tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - u_n \leqslant bq^n$.
   Cas particulier : si $a = \delta = \dfrac{1}{2}$, déterminer un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ 1 - u_n \leqslant 10^{-5}$.
   (c) On pose pour tout entier naturel n, $x_n = \dfrac{1-u_n}{(1-\delta)^n}$
      i. Montrer que $\ln x_{k+1} - \ln x_k = \ln \dfrac{1-\delta u_k}{1-\delta}$.
      ii. Montrer que $0 \leqslant \ln x_{k+1} - \ln x_k \leqslant \dfrac{\delta}{1-\delta}(1-a)q^k$.
   (d) On pose pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\ln x_{k+1} - \ln x_k)$. Montrer que la suite (S_n) converge. On notera S sa limite.
   (e) Montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que $1 - u_n \sim \mu(1-\delta)^n$. Exprimer μ en fonction de S et de a.
4. On pose, pour tout entier naturel n, $y_n = \dfrac{u_n}{(1-u_n)(1+\delta)^n}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel k, $\dfrac{y_{k+1}}{y_k} = 1 + \dfrac{\delta^2 u_k}{(1+\delta)(1-\delta u_k)}$.
   (b) En considérant $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\ln y_{k+1} - \ln y_k)$, montrer que $0 \leqslant \ln\left(\dfrac{(1-a)u_n}{a(1-u_n)(1+\delta)^n}\right) \leqslant n\dfrac{\delta^2}{1-\delta^2}$.
5. On Notera $E(x)$ la partie entière du réel x.
   Soit t un réel strictement positif
   (a) Comparer : $\delta E(\frac{t}{\delta})$, t, $\delta\left(E(\frac{t}{\delta}) + 1\right)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{\delta\to 0} \delta E(\frac{t}{\delta})$ et $\lim\limits_{\delta\to 0}(1+\delta)^{E(t/\delta)}$.
   (c) En déduire : $\lim\limits_{\delta\to 0} u_{E(t/\delta)}$.