DM n°7

A rendre jeudi 7 décembre 2006

Exercice

On pose : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$, $\begin{cases} f(x) = & -x + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| \\ g(x) = & \dfrac{x^3}{3(1-x^2)} \\ h(x) = & f(x) - g(x) \end{cases}$

1. Etudier le signe de h sur $]-1;1[$
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $(2n+1)f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)$ ainsi que $(2n+1)g\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)$ en fonction de n.

   (b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par

   $$u_n = \frac{n^{\frac{2n+1}{2}}e^{-n}}{n!} \qquad v_n = u_n e^{\frac{1}{12n}}$$

   sont adjacentes (on pourra exprimer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de f).
3. En déduire qu'il existe un réel λ tel que : $n!$ est équivalent à $\lambda\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$.

Problème

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f vérifie la propriété (P) si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

Partie 1

1. Quelles sont les fonctions constantes qui vérifient (P) ?
2. Soit f une fonction vérifiant (P). Montrer que si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle.

Partie 2

On suppose ici que f vérifie (P) et n'est pas la fonction nulle.

1. Calculer $f(0)$ et étudier la parité de f.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la donnée de $f(a)$ suffit à définir $f(na)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (on ne demande pas l'expression de $f(na)$ en fonction de $f(a)$).
3. Soit $a > 0$. Dans cette question on suppose que $\forall x \in [0;a],\ f(x) > 0$. Montrer que la donnée de $f(a)$ suffit à définir $f\left(p\dfrac{a}{2^q}\right)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{N}$.
4. Soit $a > 0$ et $x \geqslant 0$. Montrer que : $\forall q \in \mathbb{N},\ I_q = \{p \in \mathbb{N} / \ p.\dfrac{a}{2^q} \leqslant x\}$ possède un plus grand élément qui sera noté p_q.

   On pose alors, pour tout entier q, $u_q = p_q.\dfrac{a}{2^q}$. Montrer que la suite $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
5. On suppose maintenant que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer qu'il existe un réel a strictement positif tel que :
   $\forall x \in [0;a],\ f(x) > 0$.

   (b) Montrer que la donnée de $f(a)$ suffit à définir $f(x)$ pour tout x réel.

   (c) On suppose que $f(a) = 1$. Déterminer f.

   (d) On suppose que $f(a) < 1$. Montrer qu'il existe un réel α tel que :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(\alpha x)$.