

A rendre jeudi 14 décembre 2006

EXERCICE 1 :

Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe z associe $z + \frac{1}{z}$.

1. Montrer que f est surjective de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}$. f est-elle bijective ?
2. Soit $E = \{\exp(ia)/a \in \mathbb{R}\}$, et soit F l'image de E par f (c'est à dire $F = f(E)$). Montrer que F est un segment de $\mathbb{R}$ à préciser.
3. Montrer que $E = f^{-1}(F)$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel, et F un sev de E . Soit $f \in L(E)$.

On dit que F est stable par f si et seulement si : $\forall u \in F, f(u) \in F$.

On pose $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / z = x + 2y \text{ et } t = y\}$.

1. Montrer que F est un sev de E et donner 2 vecteurs a et b de F tels que F est le sous-espace engendré par a et b , i.e. $F = \text{vect}(a, b)$.
2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \rightarrow (x - 2y + z + t, y, -2y + 2z + t, -y + 2t) \end{cases}$
 - (a) Montrer que f est un endomorphisme de E .
 - (b) F est-il stable par f ?
 - (c) Montrer que f est bijectif.
3. Soit $k \in \mathbb{R}$. On note G_k l'ensemble $G_k = \{u \in \mathbb{R}^4 / f(u) = ku\}$.
 - (a) Montrer que G_k est un sev de E .
 - (b) Déterminer les éléments de G_2 , et déterminer $F \cap G_2$.

Problème**A.) fonction continue et injective**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective. Le but des questions qui suivent est de montrer qu'alors f est strictement monotone.

Soient x_0 et y_0 éléments de I , avec $x_0 < y_0$.

Soient aussi $x, y \in I$ momentanément fixés tels que $x < y$.

Soit enfin $\varphi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(tx_0 + (1-t)x) - f(ty_0 + (1-t)y)$.

1. Montrer que l'application φ est bien définie sur $[0; 1]$.
2. Montrer que l'application φ ne s'annule pas sur $[0; 1]$.
3. Montrer que $\varphi(0) \times \varphi(1) > 0$.
4. Montrer que f est strictement monotone.

B.) fonction strictement croissante et surjective

Soit $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ une application strictement croissante et surjective.

Le but des questions qui suivent est de montrer que f est continue.

1. Montrer que f est bijective.
2. Soit x_0 tel que $a < x_0 < b$ et $\varepsilon > 0$.
 - (a) Montrer l'existence d'un réel ε_0 tel que $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon$ et $[f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0] \subset]f(a), f(b)[$.
 - (b) Montrer : $\exists u, v \in]a; b[$ tels que $[f(u), f(v)] \subset [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon]$.
 - (c) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
3. Traiter le cas où $x_0 = a$. Le cas où $x_0 = b$ se traitant de la même manière n'est pas demandé.
4. Conclure.