

CLASSE DE MP

Programme de colle N°15

semaine du 20 Janvier au 24 janvier 2020

- RÉVISION DU PROGRAMME PRÉCÉDENT

- INTÉGRALES À PARAMÈTRES

- Théorème de convergence dominée (démonstration hors programme)
- Intégration terme à terme d'une série de fonctions
- Fonction définie par une intégrale sur un intervalle dépendant d'un paramètre :

- * Continuité : si f est une application de $A \times I$ (A partie de $\mathbb{R}^m$) à valeurs dans $\mathbb{K}$, continue par rapport à x sur A , continue par morceaux et intégrable par rapport à t sur I et telle qu'il existe une application φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$, alors $F(x) = \int_I f(x, t) dt$ définit une fonction continue sur A .

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout compact de A .

- * Continuité dans le cas d'une intégration sur un segment.

- * Limite : si f est une application de $A \times I$ (A partie de $\mathbb{R}^m$) à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $a \in \overline{A}$ telle que

- $\forall t \in I, x \rightarrow f(x, t)$ a une limite $\ell(t)$ quand x tend vers a

- $\forall x \in A, t \rightarrow f(x, t)$ est continue par morceaux sur I

- $\exists \varphi$ continue par morceaux sur I , positive et intégrable sur I telle que $\forall x \in A, \forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$

alors $t \rightarrow \ell(t)$ est intégrable sur I et $\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I \ell(t) dt$

- * Dérivabilité : sous les mêmes hypothèses que la continuité (où A est cette fois-ci un intervalle de $\mathbb{R}$), si de surcroît f est dérivable par rapport à x en tout point et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifie les mêmes hypothèses que f ,

alors F est de classe C^1 sur A et $\forall x \in A, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

- * Dérivées d'ordre supérieur