

Chapitre 18

Calcul différentiel

18.1 Différentiabilité

E, F et G sont trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

18.1.1 Dérivée selon un vecteur

Définition 18.1.1 Soit U un ouvert de E , $a \in U$ et $f : U \rightarrow F$.

Soit $h \in E$.

On dira que f est dérivable en a selon le vecteur h si et seulement si la fonction de la variable réelle $t \rightarrow f(a + th)$ est dérivable en 0 i.e. $t \rightarrow \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$ a une limite finie quand le réel t tend vers 0.

Dans ce cas, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$ est appelé vecteur dérivé de f en a selon le vecteur h et se note parfois $D_h f(a)$.

Remarque 18.1.2 U ouvert et $a \in U$. Alors $\exists r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a, r) \subset U$.

Alors pour $h \neq 0$, la fonction $t \rightarrow f(a + th)$ est définie sur $] -r/\|h\|, r/\|h\| [$, et donc l'étude de sa dérivabilité en 0 est légitime.

Exemple 18.1.3 $E = U = \mathbb{R}^2$, $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow 2x^3y \end{cases}$, $a = (1, 1)$ et $h = (1, 2)$.

Déterminer, si elle existe la dérivée de f en a selon h .

Exemple 18.1.4 $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \rightarrow (e^x + yz, e^{2y+z}) \end{cases}$, $a = (1, 0, 1)$ et $h = (1, -1, -1)$.

Montrons que f a un vecteur dérivé en a selon h et le calculer. On trouvera $D_{(1, -1, -1)} f(1, 0, 1) = (e - 1, -3e)$.

Exemple 18.1.5 $E = \mathbb{R}^2$ et $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. $f : \begin{cases} U & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow x^2 + \frac{1}{y} \end{cases}$, $a = (1, 1)$ et $h = (1, 2)$.

Montrer que f a une dérivée en a selon h à déterminer.

Proposition 18.1.6 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

f a une dérivée en a selon $h \implies f$ a une dérivée en a selon λh et $D_{\lambda h} f(a) = \lambda D_h f(a)$.

car si $\lambda \neq 0$, alors soit $\varphi : t \rightarrow f(a + th)$ et $\psi : t \rightarrow f(a + t\lambda h)$. $\forall t$ tel que $\max(|t|, |\lambda t|) < \frac{r}{\|h\|}$, $\psi(t) = \varphi(\lambda t)$, i.e. $|t| < \min(\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{|\lambda| \|h\|})$. Or φ dérivable en 0 donc ψ aussi et $\psi'(0) = \lambda \varphi'(0)$, i.e. $D_{\lambda h} f(a) = \lambda D_h f(a)$.

Si $\lambda = 0$ alors l'application φ est constante, donc de dérivée nulle, d'où $D_{\lambda h} f(a) = 0$ et $\lambda D_h f(a) = 0$, il y a encore égalité.

18.1.2 Dérivée selon les vecteurs d'une base

Définition 18.1.7 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , U un ouvert de E , $a \in U$ et $f : U \rightarrow F$. La dérivée de f en a selon le vecteur e_k , si elle existe, est appelée dérivée partielle de f en a selon sa $k^{i\text{ème}}$ coordonnée (dans $\mathcal{B}$) et se note souvent, s'il n'y a qu'une seule base en jeu : $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = D_{e_k} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t}$.

Exemple 18.1.8 Reprendre l'exemple 18.1.5. $E = \mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (i, j)$ avec $i = (1, 0)$ et $j = (0, 1)$. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

ATTENTION f a des dérivées en a selon tous les vecteurs de $\mathcal{B} \nRightarrow f$ a des dérivées en a selon tous les vecteurs de E .

Exemple 18.1.9 $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (i, j)$ avec $i = (1, 0)$ et $j = (0, 1)$. Soit $f : (x, y) \rightarrow \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

1. En revenant à la définition, montrer que f a une dérivée en $(0, 0)$ selon le vecteur $(1, 0)$ et selon le vecteur $(0, 1)$.
2. Qu'en conclure sur $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$?
3. Étudier l'existence de la dérivée de f en $(0, 0)$ selon le vecteur $(1, 1)$.
4. Remarque complémentaire : f est-elle continue en $(0, 0)$?

18.1.3 Expression dans une base de F d'une dérivée selon un vecteur

Proposition 18.1.10 Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F .

U un ouvert de E et $f : U \rightarrow F$.

Notons $f_1, \dots, f_p$ les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}'$, i.e. $\forall x \in U$, $f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x) e'_k$

où $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $a \in U$ et $h \in E$.

f a une dérivée en a selon $h \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, f_k a une dérivée en a selon h

et alors $D_h f(a) = \sum_{k=1}^p D_h f_k(a) e'_k$.

car $\varphi : t \rightarrow \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = \sum_{k=1}^p \frac{f_k(a + th) - f_k(a)}{t} e'_k$ (*) et on sait qu'une fonction vectorielle a une limite en un point si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées a une limite

en ce point. Donc φ a une limite finie en 0 si et seulement si $\forall k, \varphi_k : t \rightarrow \frac{f_k(a+th) - f_k(a)}{t}$ a une limite finie en 0, c'est à dire si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k$ est dérivable en a selon h . L'égalité finale est alors la conséquence de (*).

18.1.4 Différentiabilité en un point

Définition 18.1.11 U un ouvert de $E, a \in U$ et $f : U \rightarrow F$.

On dira que f est différentiable en a

$\iff \exists \ell_a \in L(E, F)$ tq $\forall h \in E$ tq $a+h \in U, f(a+h) = f(a) + \ell_a(h) + \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ où ε est définie au voisinage de 0_E et à valeurs dans F .

On dit aussi que f possède un DL_1 en a .

Théorème 18.1.12 f différentiable en $a \implies f$ continue en a

car E étant de dimension finie, ℓ_a est continue sur E (comme toute application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie).

Alors $\lim_{h \rightarrow 0} \ell_a(h) = \ell_a(0) = 0$ et donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$, f est ainsi continue en a .

Théorème 18.1.13 f est différentiable en $a \implies \forall h \in E, f$ a une dérivée en a selon h et alors $D_h f(a) = \ell_a(h)$.

car ...

Remarque 18.1.14 $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = D_{e_k} f(a) = \ell_a(e_k)$.

Matriciellement, dans les bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F , la matrice colonne de $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ est donc la k ème colonne de la matrice de ℓ_a .

Conséquence 18.1.15 Si f est différentiable en a , alors $\ell_a \in L(E, F)$ est unique.

On l'appelle l'application différentielle de f en a . On la note df_a ou $df(a)$. Donc avec ces notations,

$$\forall h \text{ tq } a+h \in U, f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

$df_a(h)$ ne note aussi $df(a).h$

Exemple 18.1.16 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \rightarrow (3x^2 + y, xy) \end{cases}$ et $a = (1, 2)$. Montrons que f est différentiable en a et donner la matrice de df_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Proposition 18.1.17 Soit f différentiable en $a, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour $h = \sum_{k=1}^n h_k e_k$, alors $df_a(h) = \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

C'est le théorème 18.1.13 en utilisant le fait que df_a est linéaire :

$$df_a(h) = \sum_{k=1}^n h_k df_a(e_k) = \sum_{k=1}^n h_k D_{e_k} f(a) = \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k.$$

Notation 18.1.18 L'application df_a se note $df_a = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k$ où $dx_k : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_k$.

Proposition 18.1.19 Soit $f : U \rightarrow F$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F .

Notons $f_1, \dots, f_p$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}' : f = \sum_{j=1}^p f_j e'_j$ où $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $a \in U$.

f est différentiable en a si et seulement si $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, f_j est différentiable en a et alors

$$\forall h \text{ tq } a + h \in U, \quad df_a(h) = \sum_{j=1}^p df_j(a)(h) e'_j.$$

car ...

18.1.5 Application différentiable sur un ouvert

Définition 18.1.20 $f : U \rightarrow F$.

On dira que f est différentiable sur U si et seulement si f est différentiable en tout point de U .

On appelle alors application différentielle de f sur U l'application $df : \begin{cases} U & \rightarrow L(E, F) \\ a & \rightarrow df_a \end{cases}$

Exemple 18.1.21 f constante sur $U \implies f$ différentiable sur U et $df = 0$.

car $\forall a \in U, f(a+h) = f(a) = f(a) + 0(h) + \|h\| 0$ et donc $\forall a \in U, df(a) = 0$.

Exemple 18.1.22 $f \in L(E, F)$, alors f est différentiable sur E et $\forall a \in U, df_a = f$.

car $\forall a \in E, \forall h \in E, f(a+h) = f(a) + f(h) = f(a) + f(h) + \|h\| 0$ et donc f est différentiable en a et $df_a = f$.

$$df : \begin{cases} U & \rightarrow L(E, F) \\ a & \rightarrow f \end{cases}$$

Exemple 18.1.23 Cas où $E = \mathbb{R}$ et $U = I$ intervalle de $\mathbb{R}$. $f : I \rightarrow F$. f différentiable en $a \iff f$ dérivable en a (voir chapitre "fonctions vectorielles") et $df_a(h) = f'(a)h$.

f différentiable sur $I \iff f$ dérivable sur I

18.1.6 Matrice Jacobienne

Définition 18.1.24 E de dimension n et F de dimension p et U ouvert de E .

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F . Soit $a \in U$.

$f : U \subset E \rightarrow F$ différentiable en a .

On appelle matrice Jacobienne de f en a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice de l'application linéaire df_a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On la note souvent $J_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} f(a) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} df_a$

Exemple 18.1.25 Reprendre les exemples 18.1.3 et 18.1.16, et dans chaque cas donner la matrice Jacobienne de f en a dans les bases canoniques de E et F .

$$\textbf{Exemple 18.1.26} : \begin{cases} (\mathbb{R}^*)^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \rightarrow (\frac{1}{x}, \frac{x}{y}, xy) \end{cases}, \text{ et } a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{*2}.$$

Montrer que f est différentiable en (x_0, y_0) et donner la matrice Jacobienne de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Proposition 18.1.27 Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

$$\text{Alors } J_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

car la colonne j de la matrice de df_a est constituée des coordonnées de $df_a(e_j) = D_{e_j}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Cas particulier où $E = F$

Alors $df_a \in L(E)$. Dans une base $\mathcal{B}$ de E , la matrice Jacobienne est une matrice carrée. Dans ce cas on appelle Jacobien de f en a le déterminant de la matrice Jacobienne de f en a .

Le Jacobien de f en a est donc

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}$$

18.2 Opérations sur les applications différentiables

18.2.1 Combinaisons linéaires

Théorème 18.2.1 Soit $f, g : U \subset E \rightarrow F$. Soit $a \in U$.

f et g différentiables sur U (resp en a) $\implies \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est différentiable sur U (resp en a) et $d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$ (resp $d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$)

car ...

18.2.2 Différentielle de $B(f, g)$ où B est une application bilinéaire et f et g différentiables

Théorème 18.2.2 Soit $f, g : U \subset E \rightarrow F$ différentiables sur U .

$B : F \times F \rightarrow G$ application bilinéaire.

Alors $B(f, g)$ est différentiable sur U et $d(B(f, g)) = B(df, G) + B(f, dG)$, i.e.

$\forall a \in U, \forall h \in E$ tq $a + h \in U$, $d(B(f, g))_a(h) = B(df_a(h), g(a)) + B(f(a), dg_a(h))$.

car ...

Exemple 18.2.3 Soit $f : U \rightarrow F, g : U \rightarrow F$. On suppose que F est muni d'un produit scalaire.

f et g différentiables sur $U \implies \langle f, g \rangle$ différentiable sur U et

$\forall a \in U, d\langle f, g \rangle_a = \langle df_a, g(a) \rangle + \langle f(a), dg_a \rangle$.

Exemple 18.2.4 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3, g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ différentiables sur U , où $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel.

Alors $f \wedge g$ est différentiable sur U et $\forall a \in U, d(f \wedge g)_a = df_a \wedge g(a) + f(a) \wedge dg_a$.

Exemple 18.2.5 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3, g : U \rightarrow \mathbb{R}^3, h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ différentiables sur U où $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique.

Alors $\det(f, g, h)$ est différentiable sur U et

$\forall a \in U, d(\det(f, g, h))_a = \det(df_a, g(a), h(a)) + \det(f(a), dg_a, h(a)) + \det(f(a), g(a), dh_a)$.

18.2.3 Différentielle d'une composée d'applications différentiables

Théorème 18.2.6 E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie.

U ouvert de E et V ouvert de F .

$f : U \rightarrow F$ et $g : V \rightarrow G$ avec $f(U) \subset V$.

$\left. \begin{array}{l} f \text{ différentiable sur } U \\ g \text{ différentiable sur } V \end{array} \right\} \implies g \circ f \text{ différentiable sur } U \text{ et } \forall a \in U, d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$

car ...

Conséquence 18.2.7 sur les matrices jacobiniennes :

$\left. \begin{array}{l} \mathcal{B}_1 \text{ base de } E \\ \mathcal{B}_2 \text{ base de } F \\ \mathcal{B}_3 \text{ base de } G \end{array} \right\} \text{ et les mêmes hypothèses sur } f, g.$

Alors $J_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(g \circ f)(a) = J_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}g(f(a)) \times J_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}f(a)$

18.2.4 Règle de la chaîne

Théorème 18.2.8 U ouvert de $\mathbb{R}^m$, V ouvert de $\mathbb{R}^p$ et W ouvert de $\mathbb{R}^n$.

$\varphi : U \rightarrow V$ et $f : V \rightarrow W$ tq φ différentiable sur U et f différentiable sur V .

Soit $F = f \circ \varphi$. Soit $a = (u_1, \dots, u_m) \in U$ et $b = \varphi(a) = (x_1(a), \dots, x_p(a))$, donc $F(a) = f(b)$.

alors $\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \frac{\partial F}{\partial u_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(a)) \frac{\partial x_k}{\partial u_j}(a)$

en utilisant les matrices jacobiniennes

Exemple 18.2.9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $F : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \rightarrow f(t^2 + 1, t^3) \end{cases}$ et $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $F'(a)$ en fonction des dérivées partielles de f en a .

Exemple 18.2.10 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $F : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v, w) & \rightarrow f(uv + vw, 2u + 3v + 4w) \end{cases}$.

Soit $a = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Après avoir justifié que F est différentiable sur $\mathbb{R}^3$, exprimer les dérivées partielles de F en a en fonction des coordonnées de a et des dérivées partielles de f

Exemple 18.2.11 Soit f_1 et f_2 des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \rightarrow (f_1(u^2 + v^2, 2uv), f_2(3u + 4v, 9u^2v)) \end{cases}$

Après avoir justifié que F est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, exprimer les dérivées de F selon les vecteurs de base de $\mathbb{R}^2$ en fonction des dérivées partielles de f_1 et de f_2 .

Exemple 18.2.12 À connaître : passage en coordonnées polaires.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas $(0, 0)$. Pour tout $(x, y) \in U$ on pose $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$.

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U . On pose $F(r, \theta) = f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Exprimer $\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)$ en fonction des dérivées partielles de f et de r et θ .

18.2.5 Dérivée le long d'un arc

Théorème 18.2.13 Soit γ un arc paramétré de classe C^1 sur un intervalle ouvert I , à valeurs dans un ouvert U de E .

Soit $f : U \rightarrow F$ différentiable.

Alors $f \circ \gamma$ est différentiable sur I et $\forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$.

car ...

18.2.6 Cas des fonctions numériques

$f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. On sait que $df_a \in L(E, \mathbb{R})$, i.e. df_a est une forme linéaire sur E .

Théorème 18.2.14 Représentation des formes linéaires dans un eve

E un eve et $\varphi \in L(E, \mathbb{R})$.

Alors $\exists! a \in E, \forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$.

car ...

Remarque 18.2.15 Ce théorème est important, bien au delà de son application dans le cas des fonctions différentiables

Définition 18.2.16 Gradient

$f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U et $a \in U$.

On appelle gradient de f en a l'unique vecteur de E noté $\text{grad } f(a)$ ou $\nabla f(a)$ défini par

$$\forall h \in E, df_a(h) = \langle \text{grad } f(a), h \rangle$$

Un tel vecteur existe et est unique, vu le théorème précédent.

Remarque 18.2.17 $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.

alors, $\forall h \in E$ tq $a + h \in U$, $f(a + h) = f(a) + \langle \text{grad } f(a), h \rangle + \|h\| \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Remarque 18.2.18

La dérivée de f en a selon le vecteur u est $D_u f(a) = df(a)(u) = \langle \text{grad } f(a), u \rangle$.

Supposons u unitaire et $\text{grad } f(a) \neq 0$, alors $|\langle \text{grad } f(a), u \rangle| \leq \|\text{grad } f(a)\|$ avec égalité si et seulement si les vecteurs u et $\text{grad } f(a)$ sont colinéaires.

Donc $\text{grad } f(a)$ est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Proposition 18.2.19 Expression du gradient dans une base orthonormée

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.

Alors $\text{grad } f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$

Car $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Alors $\forall h \in E, df_a(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k = \left\langle \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k, \sum_{k=1}^n h_k e_k \right\rangle,$

et donc $\text{grad } f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$

Exemple 18.2.20 *Expression du gradient en coordonnées polaires.*

Soit E de dimension 2 et (e_1, e_2) une base orthonormée de E .

Soit f différentiable sur un ouvert U de E ne contenant pas le vecteur nul, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ posons $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

On note $u_\theta = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ et $v_\theta = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$.

On note F la fonction telle que $\forall (x, y) \in U$, $f(xe_1 + ye_2) = F(r, \theta) = f(r \cos \theta e_1 + r \sin \theta e_2)$.

Montrer que $\text{grad } f(a) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)v_\theta$

18.2.7 Extremums locaux d'une fonction numérique différentiable

Définition 18.2.21 Soit U un ouvert de E , $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

On dira que f présente un maximum (local) en a si et seulement si $\exists V$ voisinage de a tel que $\forall x \in V$, $f(x) \leq f(a)$.

On dira que f présente un minimum (local) en a si et seulement si $\exists V$ voisinage de a tel que $\forall x \in V$, $f(x) \geq f(a)$.

On dira que f présente un extremum en a si et seulement si f présente un maximum en a ou f présente un minimum en a .

Donc f présente un extremum en a si et seulement si

$$\exists V \text{ voisinage de } a \text{ tq } V \subset U \text{ et } \begin{cases} \forall x \in V, f(x) \geq f(a) \\ \text{ou} \\ \forall x \in V, f(x) \leq f(a) \end{cases}$$

Remarque 18.2.22 f présente un maximum en a si et seulement si $-f$ présente un minimum en a .

On peut donc toujours se ramener au cas d'un minimum.

Théorème 18.2.23 Soit U ouvert de E , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U .

f a un extremum en $a \implies df_a = 0$, i.e. $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$, i.e. $\text{grad } f(a) = 0$

car ...

Définition 18.2.24 Soit U un ouvert de E , $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U .

On appelle point critique de f tout élément a de U tel que $df_a = 0$.

On appelle valeur critique de f toute valeur $f(a)$ lorsque a est un point critique.

On vient donc de prouver que f a un extremum en $a \implies a$ est un point critique. La réciproque est fautive.

Exemple 18.2.25 $f : (x, y) \rightarrow x^2 + xy + y^2$.

Déterminer les points critiques de f .

f a-t-elle un extremum en ces points critiques ?

Exemple 18.2.26 $f : (x, y) \rightarrow x^2(1 + y) + y^3$.

Déterminer les points critiques de f .

f a-t-elle un extremum en ces points critiques ?

18.3 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

18.3.1 Définition

Définition 18.3.1 Soit $f : U \subset E \rightarrow F$.

On dira que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si $\begin{cases} f \text{ est différentiable sur } U \\ df \text{ est continue sur } U \end{cases}$

donc

Proposition 18.3.2 Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ,

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si $\begin{cases} f \text{ est différentiable sur } U \\ \text{et} \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_k} \text{ est continue sur } U \end{cases}$

De plus,

Proposition 18.3.3 Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F , notons $f = \sum_{j=1}^p f_j e'_j$, où les fonctions f_j sont les fonctions coordonnées de f sur $\mathcal{B}' : f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si $\begin{cases} f \text{ est différentiable sur } U \\ \text{et} \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \text{ est continue sur } U \end{cases}$

car une fonction est continue sur U si et seulement si ses fonctions coordonnées sont continues sur U ...

Exemple 18.3.4 f une fonction constante sur U . On a vu dans l'exemple 18.1.21 que $\forall a \in U$, $df_a = 0$. Donc $df : \begin{cases} U & \rightarrow L(E, F) \\ a & \rightarrow 0 \end{cases}$, i.e. $df = 0$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U

Exemple 18.3.5 Reprenons l'exemple 18.1.26 : $f : \begin{cases} U = (\mathbb{R}^*)^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \rightarrow (\frac{1}{x}, \frac{x}{y}, xy) \end{cases}$. On a vu que

f est différentiable sur U .

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a vu que pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $J_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} f(x, y) = \begin{pmatrix} -1/x^2 & 0 \\ 1/y & -x/y^2 \\ y & x \end{pmatrix}$

L'application $(x, y) \rightarrow J_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} f(x, y)$ est continue sur U .

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

18.3.2 Caractérisation par les dérivées partielles

Théorème 18.3.6 Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ et $\mathcal{B}$ une base de E .

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \iff \begin{cases} \text{Les dérivées partielles par rapport aux vecteurs de base existent en tout point, et} \\ \text{ces dérivées partielles sont continues sur } U \end{cases}$

Théorème admis.

L'intérêt de ce théorème c'est qu'il n'est plus nécessaire de prouver la différentiabilité de f sur U , cette différentiabilité est acquise par l'existence et la continuité des dérivées partielles de f .

Exemple 18.3.7 $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \rightarrow \left(x^2 + 3y, \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}, e^{x+3y}\right) \end{cases}$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (et donc différentiable), et donner sa matrice Jacobienne dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

18.3.3 Opérations sur les fonctions de classe C^1

On note $C^1(U, F)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur U à valeurs dans F .

Théorème 18.3.8 $C^1(U, F)$ est un espace vectoriel.

car ...

Théorème 18.3.9 Soit $f, g \in C^1(U, E)$ et $B : E \times E \rightarrow F$ une application bilinéaire. Alors $B(f, g)$ est de classe C^1 sur U .

car ...

Théorème 18.3.10 E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie. U ouvert de E et V ouvert de F .

$f : U \rightarrow F$ tq $f(U) \subset V$ et $g : V \rightarrow G$.

f de classe C^1 sur U et g de classe C^1 sur $V \implies g \circ f$ de classe C^1 sur U .

car ...

Conséquence 18.3.11 — Les fonctions polynômes de n variables sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.
— Les fraction rationnelles de n variables sont de classe C^1 sur leur ensemble de définition.

18.3.4 Accroissement d'une fonction

Théorème 18.3.12 Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ de classe C^1 sur U .

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ de classe C^1 sur $I = [0, 1]$.

On pose $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Alors $f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$

car ...

Théorème 18.3.13 Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs.

Soit U un ouvert connexe par arcs, et $f : U \rightarrow F$ de classe C^1 sur U .

f est constante sur $U \iff df = 0$.

On a déjà vu au 18.3.4 le sens direct

Montrons la réciproque ...

18.4 Dérivées partielles d'ordre supérieur

18.4.1 Définition

Définition 18.4.1 Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ avec U ouvert.

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $a \in U$.

On suppose que la fonction $D_{e_i}f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe au voisinage de a .

Si cette fonction admet une dérivée en a selon le vecteur e_j , alors cette dérivée $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a)$ se notera $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a)$.

Dans le cas où $j = i$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} (a)$ se notera $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (a)$.

Par récurrence, de proche en proche, on peut définir des dérivées partielles d'ordre 3, 4 ...

Exemple 18.4.2 $f : (x, y, z) \rightarrow (x^2 + xyz, y^2 + z^2)$.

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. Donner sa matrice jacobienne dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont elles aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

18.4.2 Le théorème de Schwarz

Théorème 18.4.3 Sous les mêmes hypothèses qu'au dessus,

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sont continues sur U , alors

$$\forall a \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a)$$

Théorème admis.

voir un exemple ci dessus.

ATTENTION : on connaît des fonctions pour lesquelles $\exists a \in U / \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a)$

Exemple 18.4.4 Soit $f : (x, y) \rightarrow \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
2. Déterminer, si c'est possible, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (0, 0)$
3. Que dire de la continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $(0, 0)$?

18.4.3 Fonctions de classe C^k

Théorème 18.4.5 Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ de classe C^1 sur U .

Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\exists \mathcal{B}$ base de E dans laquelle les dérivées partielles de f sont de classe C^1
2. $\forall h \in E, D_h f : a \rightarrow D_h f(a)$ est de classe C^1 sur U
3. Les dérivées partielles de f par rapport à toute base de E sont de classe C^1 sur U
4. df est de classe C^1 sur U (à valeurs dans $L(E, F)$).

car ...

Définition 18.4.6 Une fonction f est de classe C^2 sur U si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés du théorème ci-dessus.

On note $C^2(U, F)$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 sur U à valeurs dans F .

Remarque 18.4.7 Le théorème de Schwarz est applicable aux fonctions de classe C^2 sur U .

Définition 18.4.8 On dira que f est de classe C^k sur U si et seulement si f admet toutes les dérivées partielles dans une base à tout ordre inférieur ou égal à k et si toutes ces dérivées partielles sont continues sur U .

Proposition 18.4.9 Opérations sur les fonctions de classe C^k sur U

- Toute combinaison linéaire de fonctions de classe C^k sur U est de classe C^k sur U .
- $f : U \rightarrow F$ et $g : V \subset F \rightarrow G$ avec $f(U) \subset V$.
 f de classe C^k sur U et g de classe C^k sur $V \implies g \circ f$ de classe C^k sur U .
- $f : U \rightarrow F$ et $g : U \rightarrow F$. B application bilinéaire sur F .
 f et g de classe C^k sur $U \implies B(f, g)$ de classe C^k sur U .

Cas particulier 18.4.10 cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Le produit de fonctions de classe C^k sur U est de classe C^k sur U
- f de classe C^k sur U et f ne s'annule pas sur $U \implies \frac{1}{f}$ est de classe C^k sur U .

Exemple 18.4.11 Les fonctions polynomiales de n variables sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$
 Les fractions rationnelles de n variables sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition.

18.4.4 Exemples d'équations aux dérivées partielles

- Equations du type $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur l'ouvert $U =]a, b[\times]c, d[$

Le but est de déterminer les fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $U =]a, b[\times]c, d[$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

Théorème 18.4.12 f de classe C^1 sur $U =]a, b[\times]c, d[$ est solution de $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff$
 $\exists \varphi :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $]c, d[$ tq $\forall (x, y) \in U, f(x, y) = \varphi(y)$

car ...

- Equations du type $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x)$ sur l'ouvert $U =]a, b[\times]c, d[$ avec g continue sur $]a, b[$

Là encore on cherche les fonctions de classe C^1 sur U solutions.

Notons G une primitive de g sur $]a, b[$.

Alors f est solution si et seulement si $\exists h$ de classe C^1 sur $]c, d[$ tq $\forall (x, y) \in U, f(x, y) = G(x) + h(y)$.

car ...

• **Equations du type $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y)$ sur l'ouvert $U =]a, b[\times]c, d[$ avec g continue sur $]a, b[\times]c, d[$**

Là encore on cherche les fonctions de classe C^1 sur U solutions. L'idée consiste à chercher une primitive de la fonction $x \rightarrow g(x, y)$ pour y fixé.

Exemple 18.4.13 Déterminer les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ solutions de $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2$.

• **Equations du type $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = g(x, y)$ sur l'ouvert $U =]a, b[\times]c, d[$ avec g continue sur $]a, b[\times]c, d[$**

Exemple 18.4.14 Déterminer les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = x$

Exemple 18.4.15 Déterminer les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{x}{y^2}$

• Utilisation d'un changement de variable

Changement de variable affine : Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = k$ avec k constante.

On s'aidera du changement de variable affine : $u = x + y, v = x - y$.

Changement de variable en polaire : Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ solutions de : $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2 + y^2)$

On pourra utiliser le changement de variable polaire $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

Déterminer les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ solutions de : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 - y^2$.

On pourra utiliser le changement de variable $u = x + y, v = x - y$

18.5 Vecteurs tangents et lignes de niveaux

18.5.1 Vecteurs tangents

Définition 18.5.1 Soit X une partie de $E, a \in X$ et v un vecteur de E .

On dit que v est tangent à X en a si et seulement si il existe γ arc paramétré défini sur $[-1, 1]$ et de classe C^1 tel que γ est à valeurs dans X , et $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$

Exemple 18.5.2 $E = \mathbb{R}^3$ et (Σ) la sphère unité.

Soit $M \in (\Sigma)$, alors tout vecteur v tel que $\overrightarrow{OM} \perp v$ est tangent à (Σ) en M

car ...

Exemple 18.5.3 $E = \mathbb{R}^3$ et X le cylindre circulaire droit d'axe $(O, \vec{k})$ et de rayon 1. Soit $M \in X$.

- Alors $\vec{k}$ est tangent à X en M
- Soit P le plan orthogonal à $\vec{k}$ et passant par M . Alors $P \cap X$ est un cercle. Tout vecteur tangent à ce cercle en M est tangent à X en M .

car ...

Théorème 18.5.4 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Soit X la nappe définie par f , i.e. la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$.

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in X$ avec $(x_0, y_0) \in U$ et $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Alors l'ensemble des vecteurs tangents à X en M_0 est le plan $\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right\}$

car ...

Conséquence 18.5.5 M est dans le plan tangent à X en $M_0 \iff \overrightarrow{M_0 M}$ est combinaison

$$\begin{aligned} & \text{linéaire de } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{vmatrix} x - x_0 & 1 & 0 \\ y - y_0 & 0 & 1 \\ z - f(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0 \\ \iff & -(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + (z - f(x_0, y_0)) = 0 \\ \iff & z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Exemple 18.5.6 Soit (Σ) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. Déterminons l'équation du plan tangent à (Σ) en A .

18.5.2 Lignes de niveaux

Définition 18.5.7 Soit $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour k réel, on appelle ligne de niveau k de f l'ensemble $L_k = \{u \in U / f(u) = k\}$.

On dira qu'un ensemble L est une ligne de niveau si et seulement si $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $L = L_k$

Théorème 18.5.8 E eve, $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1

Soit $k \in \mathbb{R}$ et L_k la ligne de niveau k .

Les vecteurs tangents à L_k en un point a de L_k sont orthogonaux à $\text{grad } f_a$.

car ...