Chapitre 5

Convexité

5.1 Parties convexes d'un espace vectoriel réel

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel réel.

5.2 Barycentre

Définition 5.2.1 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ *tq* $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \neq 0$, *et* $(a_1, ..., a_n) \in E^n$.

On appelle barycentre du n-uplet $(a_k, \lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *le point* $g \in E$ *défini par :* $g = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$,

i.e. le point g *tel que* $(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k) g = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k a_k)$

Remarque 5.2.2

1. *g est ce barycentre si et seulement si* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k - g) = 0$, *ce qui s'écrit, en utilisant la notation affine :* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0}$
2. *On ne change pas le barycentre en multipliant tous les coefficients* λ_k *par un même scalaire non nul (propriété appelé homogénéité). En particulier on peut se ramener au cas où* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Proposition 5.2.3 ***Associativité***

Soit g *le barycentre de* $(a_1, \lambda_1), ..., (a_n, \lambda_n)$ *(on suppose bien entendu que* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0$*)*

Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$ *tq* $\lambda_1 + ... + \lambda_p \neq 0$ *et* $\lambda_{p+1} + ... + \lambda_n \neq 0$.

On note g_1 *le barycentre de* $(a_1, \lambda_1), ..., (a_p, \lambda_p)$ *et* g_2 *le barycentre de* $(a_{p+1}, \lambda_{p+1}), ..., (a_n, \lambda_n)$.

Alors g *est le barycentre de* $(g_1, \lambda_1 + ... + \lambda_p)$ *et de* $(g_2, \lambda_{p+1} + ... + \lambda_n)$

En effet ...

Cas particulier 5.2.4 ***: centre de gravité***
Si $\forall k,\ \lambda_k = 1$, *alors le barycentre de* $(a_1, 1), ..., (a_p, 1)$ *est appelé centre de gravité de* $a_1, ..., a_p$, *ou centre de masse, ou isobarycentre. C'est aussi le barycentre des* a_k *affectés tous de la même masse* λ *non nulle.*

Exemple 5.2.5 *Dans le plan affine, l'isobarycentre de deux points* A *et* B *est le milieu du segment* $[A, B]$

Exemple 5.2.6 *Dans le plan affine, soit* A, B, C *trois points non alignés. Montrer que le centre de gravité du triangle* ABC *est sur la médiane issue de* A*, i.e. la droite issue de* A *et passant par le milieu de* $[B, C]$.
Montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

5.2.1 Segments de E

Définition 5.2.7 *Soient* a *et* b *dans* E. *On appelle segment d'extrémités* a *et* b*, noté* $[a, b]$ *ou* $[b, a]$*, l'ensemble des barycentres de* $(a, t), (b, 1-t)$ *lorsque* t *décrit* $[0, 1]$
$[a, b] = \{ta + (1-t)b / t \in [0, 1]\} = \{\alpha a + (1-\alpha)b / \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta \neq 0\}$

Remarque 5.2.8

1. *Dans le cas où* $E = \mathbb{R}$, *on distingue* $[a, b]$ *de* $[b, a]$, *car* $\mathbb{R}$ *est ordonné. Dans ce cas, la notation* $[a, b]$ *suppose (sauf mention du contraire) que* $a \leqslant b$.
   Lorsque E *n'est pas* $\mathbb{R}$, $[a, b]$ *et* $[b, a]$ *désignent le même segment.*
2. $[a, a] = \{a\}$.
3. $[a, b]$ *est aussi l'ensemble des barycentres de* $(a, 1-t), (b, t)$ *lorsque* t *décrit* $[0, 1]$.

Proposition 5.2.9 .
$[a, b]$ *est l'ensemble des barycentres de* $(a, \alpha), (b, \beta)$ *lorsque* $\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta \neq 0$

car ...

Exemple 5.2.10

1. *Prenons* $E = \mathbb{R}[X]$. *Le segment* $[X, X^2]$ *est l'ensemble* $\{P \in \mathbb{R}[X] / \exists t \in [0, 1]\ tq\ P = tX + (1-t)X^2\}$.
   Par exemple $\dfrac{1}{3}X + \dfrac{2}{3}X^2 \in [X, X^2]$.
2. $f = \dfrac{2}{5}\sin + \dfrac{3}{5}\cos \in [\sin, \cos]$ *dans* $\mathcal{C}(\mathbb{R})$
3. *On peut aussi parler d'un segment de matrices, ou d'un segment d'endomorphismes ...*

5.2.2 Convexité

Définition 5.2.11 *Soit* $\Gamma \subset E$. *On dit que* Γ *est convexe si et seulement si,* $\forall a, b \in \Gamma,\ [a, b] \subset \Gamma$, *i.e.* $\forall a, b \in \Gamma,\ \forall t \in [0, 1],\ ta + (1-t)b \in \Gamma$.

Proposition 5.2.12 *Une intersection non vide de convexes est convexe.*

Clair ...

Proposition 5.2.13 *Un segment de* E *est un convexe de* E.

car ...

Proposition 5.2.14 *Une boule (ouverte ou fermée) est convexe*

car ...

Théorème 5.2.15 *Soit* $\Gamma \subset E$.

Γ *est convexe* $\iff$ *tout barycentre de points de* Γ *affectés de masses positives est un point de* Γ

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_1, ..., a_n) \in \Gamma^n,\ \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n, \\ \lambda_1 + ... + \lambda_n \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in \Gamma \end{array} \right.$$

car : $\Leftarrow$) est clair : il suffit de prendre $n = 2$ et on retrouve la définition de Γ convexe.
$\Rightarrow$) : par récurrence sur n. ...

5.3 Fonctions convexes d'une variable réelle

5.3.1 Généralités

Définition 5.3.1 *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$.

On dira que f *est convexe sur* I $\iff \forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$

$\iff \forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

Exemple 5.3.2 *Toute application linéaire de* I *dans* $\mathbb{R}$ *(*$f : x \to \alpha x$*) est convexe (car il y a égalité, donc inégalité large)*

Exemple 5.3.3 *Si on sait que* f *est convexe sur* I*, alors* $\forall x, y \in I,\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$

Proposition 5.3.4 f *est convexe sur* I *si et seulement si tout arc est sous sa corde*

Figure :

5.3.2 Caractérisation par l'épigraphe

Définition 5.3.5 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$.

On appelle épigraphe de f *l'ensemble* $\mathcal{E}(f) = \{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I \text{ et } y \geqslant f(x)\}$
(C'est la partie du plan $\mathbb{R}^2$ *située "au dessus" de la courbe)*

Figure :

Théorème 5.3.6 f *est convexe* $\iff \mathcal{E}(f)$ *est une partie convexe de* $\mathbb{R}^2$*, i.e.* $\forall a, b \in \mathcal{E}(f),\ [a, b] \subset \mathcal{E}(f)$

car ...

C'est un critère géométrique très pratique : par exemple, la fonction cos n'est pas convexe sur $[0, \pi]$, $x \to x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, $x \to x^3$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$ mais est convexe sur $\mathbb{R}_+$

5.3.3 Caractérisation par l'inégalité des pentes

Théorème 5.3.7 *f est convexe sur I* $\Longleftrightarrow$
$\forall a, b, c \in I,\ a < b < c \Longrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

Faire une figure pour comprendre comment mémoriser ces inégalités.

Démonstration : ...

5.3.4 Inégalités de convexité

Théorème 5.3.8 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

$$f \text{ convexe sur } I \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, ..., x_n) \in I^n,\ \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,$$
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Remarquons tout d'abord que I est un intervalle et donc convexe, et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I$.

Alors en effet ...

Exemple 5.3.9 *1.* $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2 \leqslant \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$ *car ...*

2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ e^{\frac{2a+b+c}{4}} \leqslant \dfrac{1}{2}e^a + \dfrac{e^b+e^c}{4}$ *car ...*

5.4 Fonctions concaves d'une variable réelle

Définition 5.4.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*
On dira que f est concave sur I $\Longleftrightarrow$ $-f$ est convexe sur I

Conséquence 5.4.2

1. *f concave sur I $\Longleftrightarrow$*
   $\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
   i.e. tout arc est au dessus de sa corde.
2. *La partie située sous la courbe est convexe.*
3. *Inégalités des pentes : écrivez les ...*
4. *Inégalités de convexité :*

Exemple 5.4.3 *Exemples de fonctions concaves :*
- $x \to \sqrt{x}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.
- $x \to \ln x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$
- $x \to x^3$ *sur (compléter)*

5.5 Fonctions convexes dérivables ou deux fois dérivables sur I

Théorème 5.5.1 *Soit f dérivable sur I et (Γ) sa courbe représentative dans* $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

$$\begin{array}{lcc} f \text{ convexe sur } I & \Longleftrightarrow & \text{la dérivée de } f \text{ est croissante sur } I \\ & \Longleftrightarrow & \text{La courbe est toujours au dessus de ses tangentes} \end{array}$$

En effet :

Conséquence 5.5.2 *Soit f deux fois dérivable sur I*
- *f est convexe sur I $\Longleftrightarrow$ $f'' \geqslant 0$ sur I*
- *f concave sur I $\Longleftrightarrow$ $f'' \leqslant 0$ sur I*

Exemple 5.5.3
1. *exp est convexe sur* $\mathbb{R}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ x \to x^n$ *est convexe sur* $\mathbb{R}_+$.
3. $x \to \ln x$ *est concave sur* $\mathbb{R}_+^*$.
4. $x \to \sqrt{x}$ *est concave sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et donc sur* $\mathbb{R}_+$ *car ...*

Application 5.5.4
1. $\forall x \in [0,\pi],\ \sin x \leqslant x$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$
3. *On sait que* ln *est concave sur* $]0,+\infty[$. *En utilisant la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1, en déduire une inégalité.*

5.6 Régularité des fonctions convexes

Remarque 5.6.1 *f convexe sur I $\not\Longrightarrow$ f continue sur I*

Donner un exemple d'une fonction convexe mais non continue sur $[a,b]$

Remarque 5.6.2 *f convexe sur $]a,b[$ $\not\Longrightarrow$ f dérivable sur $]a,b[$*

Donner un exemple d'une telle fonction.

Exercice 5.6.3 *Soit f convexe sur I et soit $a \in \mathring{I}$. Alors $\exists b,c \in I$ tels que $b < a < c$.*

1. *Notons* $\tau_a : \begin{cases} [b,a[& \to \mathbb{R} \\ x & \to \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$. *Montrer que* τ_a *est croissante.*
2. *Montrer que* τ_a *est majorée.*
   En déduire que f *est dérivable à gauche en* a.
3. *Montrer que* f *est dérivable à droite en* a.
4. *Montrer que* f *est continue en* a.

Remarque 5.6.4 *Le théorème démontré dans cet exercice, qui dit que toute fonction convexe sur* I *est continue sur* $\mathring{I}$ *est hors programme.*