COURS DE MATHÉMATIQUES - MP

Gilbert Roux

Lycée du Parc des Loges à Évry, le 6 juin 2019

Table des matières

Chapitre 1

Algèbre générale

Contents

1.1 Groupes et sous-groupes

1.1.1 Généralités

Définition 1.1.1 *On dira que $(G,*)$ est un groupe ssi G est un ensemble tel que*

- *$*$ est un loi de composition interne sur G, c'est à dire, une application de G^2 dans G. L'image du coupe (x,y) de G^2 par cette loi de composition interne sera alors notée $x*y$.*
- *$*$ est associative, c'est à dire que $\forall x,y,z \in G,\ x*(y*z) = (x*y)*z$*
- *$*$ possède un élément neutre, c'est à dire : $\exists e \in G$ tel que $\forall x \in G,\ e*x = x*e = x$*
- *Tout élément de G possède un symétrique pour la loi $*$, c'est à dire $\forall x \in G,\ \exists y \in G$ tel que $x*y = y*x = e$*

Exemple 1.1.2 *Préciser si les ensembles suivants sont des groupes, on n'en sont pas :*

- $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{C},+)$
- $(\mathbb{R},\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{R}_+^*,\times)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{Z}^*,\times)$
- *Si E est un ensemble, notons $Bij(E)$ l'ensemble des applications bijectives de E sur E. $(Bij(E),\circ)$ est-il un groupe ?*
- $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),+)$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\times)$, $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$
- *$(E,+,.)$ un espace vectoriel. Alors $(E,+)$ est un groupe*

Proposition 1.1.3 *$(G,*)$ un groupe. Alors l'élément neutre est unique et tout élément de G a 1 seul symétrique.*
Le symétrique de x pour la loi $*$ est noté x^{-1} s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté,

car ...

Proposition 1.1.4 *$(G,*)$ un groupe. Alors $\forall x,y \in G,\ (x*y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$*

car ...

Proposition 1.1.5 *$(G,*)$ un groupe. Alors $\forall x,y,a \in G,\ a*x = a*y \Longrightarrow x = y$ et de même $x*a = y*a \Longrightarrow x = y$*

car ...

Définition 1.1.6 *On dira que la loi $*$ est commutative si et seulement si $\forall x,y \in G,\ x*y = y*x$*
Dans ce cas le groupe $(G,*)$ est dit commutatif ou abélien.

Reprendre les exemple du dessus et préciser quels sont les groupes abéliens.

À retenir : groupes classiques
- Groupes additifs : $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{Z},+)$ ...
- Groupes multiplicatifs et abéliens $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^*_+,\times)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{Q}^*_+,\times)$ ...
- Groupes non abéliens $(Bij(E),\circ)$, $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$ ...
- Tout espace vectoriel est un groupe abélien pour la loi $+$.

1.1.2 Produit fini de groupes

Définition-théorème 1.1.7 *Soit $(G_i,T_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille de groupes.*
On pose $G = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} G_i = \{(g_1,...,g_n)/\forall i \in \{1,...,n\},\ g_i \in G_i\}$ On définit alors sur G une loi de composition interne T comme suit :
Pour $g = (g_1,..,g_n)$ et $g' = (g'_1,..,g'_n)$ dans G alors $gTg' = (g_1T_1g'_1,...,g_nT_ng'_n)$
(G,T) est alors un groupe, appelé groupe produit des groupes $(G_i,T_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$

car ...

Exemple 1.1.8
- *$(\mathbb{R}^2,+)$: c'est la loi $+$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$*
- *$(\mathbb{R}^{*2},\times)$; la loi $\times$ est ainsi définie : $(x,y)\times(x',y') = (xx',yy')$. Donner l'élément neutre de $(\mathbb{R}^{*2},\times)$, ainsi que le symétrique de (x,y).*

1.1.3 Sous-groupes de $(G,*)$

Définition 1.1.9 *$(G,*)$ un groupe et $H \subset G$.*
On dira que H est un sous-groupe de $(G,*)$ si et seulement si $(H,*)$ est un groupe, où la loi $*$ sur H est la restriction de $*$ à H

Proposition 1.1.10 *Soit H un sous-groupe de $(G,*)$. Alors*
- *l'élément neutre de $(H,*)$ est l'élément neutre de $(G,*)$ (ce qui prouve que l'élément neutre de G est dans H)*
- *Soit $x \in H$, alors $x \in G$. Le symétrique de x dans H est le symétrique de x dans G.*

car ...

Proposition 1.1.11 *Soit $(G,*)$ un groupe et $H \subset G$.*

$$H \text{ un sous-groupe de } (G,*) \iff \begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall x,y \in H,\ x*y \in H \\ \forall x \in H,\ x^{-1} \in H \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} H \neq \emptyset \\ \forall x,y \in H,\ x*y-1 \in H \end{cases}$$

car ...

Exemple 1.1.12 — *U_n est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.*
— *Si E est un espace vectoriel, $Gl(E)$ est un sous-groupe de $(Bij(E), \circ)$*

Remarque 1.1.13 *Il est beaucoup plus rapide de montrer, quand c'est possible, qu'un ensemble muni d'une lci est un sous-groupe d'un groupe connu, que de redémontrer tous les axiomes de groupes. Ceci justifie qu'on ait une collection de groupes très généraux, qui permettront ensuite de s'intéresser à des sous-groupes de ces groupes "colossaux" : par exmple $(\mathbb{C}, +)$ ou $(\mathbb{C}^*, \times)$ ou $(Bij(E), \circ)$ ou $(\mathbb{C}^n, +)$ etc.*

Proposition 1.1.14 *Soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille quelconque (pas nécessairement finie) de sous-groupes de $(G,*)$. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de $(G,*)$: une intersection quelconque de sous-groupes d'un groupe est un sous-groupe de ce groupe.*

car ...

Exercice 1.1.15 *Soit $(G,*)$ un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes de ce groupe. On suppose que $H_1 \not\subset H_2$ et $H_2 \not\subset H_1$ Montrer qu'alors $H_1 \cup H_2$ n'est pas un sous-groupe de $(G,*)$.*

1.1.4 Partie génératrice d'un groupe

Définition 1.1.16 *Soit $(G,*)$ un groupe et S une partie de G. On appelle sous-groupe de $(G,*)$ engendré par S l'intersection de tous les sous-groupe de $(G,*)$ contenant S, on le note souvent $< S >$.*
Donc $< S >= \bigcap\limits_{\begin{cases} H \text{ sous-groupe de } G \\ S \subset H \end{cases}} H$

On sait que $< S >$ est un sous-groupe de G car c'est une intersection de sous-groupes.

Conséquence 1.1.17 *$< S >$ est le plus petit sous-groupe de G contenant S.*

Théorème 1.1.18 *$< S >$ est l'ensemble de tous les produits d'éléments de S et de leurs symétriques, i.e.*
$< S >= \{a_1 * ... * a_k / k \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall i,\ a_i \in S \text{ ou } a_i^{-1} \in S\}$

car ...

Exemple 1.1.19 — *Les transpositions engendrent le groupe $(S_n, \circ)$*
— *$\{e^{i\frac{2\pi}{n}}\}$ engendre $(U_n, \times)$*

1.1.5 Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Théorème 1.1.20 *Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z} = \{nk/k \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}$ i.e.*
H sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +) \iff \exists!\ n \in \mathbb{N},\ H = n\mathbb{Z}$

car ...

Remarque 1.1.21 *L'ensemble $n\mathbb{Z}$ est constitué des multiples entiers de l'entier n ; $2\mathbb{Z}$ est donc l'ensemble des entiers pairs, $10\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de 10 etc.*

1.2 Morphismes de groupes

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.2.1 *Soient $(G_1, *)$ et (G_2, T) deux groupes, et $\varphi : G_1 \to G_2$ une application.*
φ est un morphisme pour les groupes $(G_1, *)$ et (G_2, T) ssi $\forall x, y \in G_1,\ \varphi(x * y) = \varphi(x)T\varphi(y)$

Exemple 1.2.2 *Compléter :*
- — $\ln$ *est un morphisme pour les groupes*
- — *exp est un morphisme pour les groupes*
- — *det est un morphisme pour les groupes*
- — *La signature ϵ est un morphisme pour les groupes*

Proposition 1.2.3 *Soit $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme pour les groupes $(G_1, *)$ et (G_2, T). Alors*
- — *$\varphi(e_1) = e_2$ où e_1 est le neutre de $(G_1, *)$ et e_2 est le neutre de (G_2, T)*
- — *$\forall x \in G_1,\ \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$*

Exemple 1.2.4 *Traduire cette propriété pour les morphismes de l'exemple du-dessus*

1.2.2 Image et image réciproque d'un sous-groupe

Théorème 1.2.5 *Soit $\varphi : (G_1, *) \to (G_2, T)$ un morphisme de groupes.*
- — *H_1 un sous-groupe de $(G_1, *) \Longrightarrow \varphi(H_1)$ est un sous-groupe de (G_2, T)*
- — *H_2 un sous-groupe de $(G_2, T) \Longrightarrow \varphi^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de $(G_1, *)$*

Rappel : soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$.
Pour $A \subset E$ alors $f(A) = \{f(x)/x \in A\}$. c'est l'(ensemble) image de A par f.
Pour $B \subset F$ alors $f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}$. C'est l'image réciproque de B par f. Cette image réciproque est un ensemble, et elle existe même si f n'est pas bijective, i.e. même si l'application f^{-1} n'existe pas.

Démontrons alors ce théorème ...

Définition 1.2.6 *Soit $\varphi : (G_1, *) \to (G_2, T)$ un morphisme de groupes.*
- — *On appelle noyau du morphisme l'ensemble noté $Ker(\varphi)$ défini par*
  $Ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{e_2\}) = \{x \in G_1/\varphi(x) = e_2\}$ où e_2 est le neutre de (G_2, T)
- — *On appelle image de ce morphisme l'ensemble noté $Im(\varphi) = \varphi(G_1) = \{\varphi(x)/x \in G_1\}$*

Proposition 1.2.7 *Soit $\varphi : (G_1, *) \to (G_2, T)$ un morphisme de groupes. Alors $Ker(\varphi)$ est un sous-groupe de $(G_1, *)$ et $Im(\varphi)$ est un sous-groupe de (G_2, T).*

Ce n'est rien d'autre que le théorème du dessus. Rédigez proprement la démonstration.

Remarque 1.2.8 *Soient E et F deux espaces vectoriels. On sait que $(E,+)$ et $(F,+)$ sont des groupes. Soit f un endomorphisme de E dans F, alors f est un morphisme pour les groupes $(E,+)$ et $(F,+)$. Le noyau de f en tant que noyau d'un endomorphisme est $Ker(f) = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$, c'est donc le noyau de f regardé comme un morphisme de groupes, car 0_F est le neutre du groupe $(F,+)$. Les deux notions de noyau n'entrent pas en conflit !*

1.2.3 Injectivité, isomorphisme de groupes

Théorème 1.2.9 *Soit $\varphi : (G_1, *) \to (G_2, T)$ un morphisme de groupes.*
φ est injectif $\iff$ $Ker(\varphi) = \{e_1\}$.

car ...

Remarque 1.2.10 *Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F. Vous avez vu en MPSI que f est injectif si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul, ce qui est exactement ce que dit le théorème ci-dessus : cette propriété est donc uniquement dûe à la structure de groupes pour les lois $+$, sans lien avec la loi externe des espaces vectoriels.*

Définition 1.2.11 *On appelle isomorphisme de groupes tout morphisme de groupes bijectif.*

Exemple 1.2.12 *Compléter :*
- $\ln$ *est un isomorphisme pour les groupes*
- *exp est un isomorphisme pour les groupes*
- *det est-il un isomorphisme de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$?*

Théorème 1.2.13 *Soit $\varphi : (G_1, *) \to (G_2, T)$ un isomorphisme de groupes. Alors φ^{-1} est un isomorphisme de (G_2, T) sur $(G_1, *)$*

car ...

1.3 Groupes monogènes et cycliques

1.3.1 Congruence modulo n, avec $n > 0$

Dans tout ce paragraphe, n est un entier naturel strictement positif.

Proposition 1.3.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par $a\mathcal{R}b \iff n$ divise $b-a$ est une relation d'équivalence

car ...

Définition 1.3.2

$$\textbf{\textit{On dira que }} a \textbf{\textit{ et }} b \textbf{\textit{ sont congrus modulo }} n \iff n \text{ divise } b-a$$
$$\iff n \text{ divise } a-b$$
$$\iff b-a \text{ multiple de } n$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ b = a + nk$$

On notera alors $a \equiv b \ \ [n]$ ou $a \equiv b \pmod n$

Théorème 1.3.3 *La relation de congruence modulo n est compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$ et avec la multiplication dans $\mathbb{Z}$, c'est à dire :*

$$\begin{cases} a \equiv b\ [n] \\ c \equiv d\ [n] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d\ [n] \\ ac \equiv bd\ [n] \end{cases}$$

car ...

1.3.2 L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Théorème 1.3.4 *Rappel : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. L'ensemble des classes d'équivalence sur E constitue une partition de E.*

car ...

Définition 1.3.5 *On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalences dans la relation de congruence modulo n.*

Remarque 1.3.6 *Lorsque n est fixé, on note souvent sous la forme $\dot{k}$ la classe d'équivalence de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On peut aussi utiliser la notation $\overline{k}$*

Proposition 1.3.7 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b\ [n] \iff \dot{a} = \dot{b} \iff \iff \exists k \in \mathbb{Z}\ \ tq$ $b = a + nk$*

car ...
Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\dot{6} = \dot{1} = ...$

Proposition 1.3.8 *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un ensemble de cardinal n.*

Car ...

Exercice 1.3.9 *Dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$, donner un entier a tel que $\dot{87} = \dot{a}$ avec $0 \leqslant a < 17$.*

1.3.3 Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Proposition 1.3.10 *Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, si $a \equiv a'\ [n]$ et $b \equiv b'\ [n]$ alors $\dot{\overline{a+b}} = \dot{\overline{a'+b'}}$.*

Clair, c'est la compatibilité de la relation de congruence avec l'addition dans $\mathbb{Z}$. D'où la

Définition 1.3.11 *Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on pose $\dot{a} + \dot{b} = \dot{\overline{a+b}}$.*

Théorème 1.3.12 *L'addition ci-dessus définit une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien de cardinal n. Ce groupe est engendré par $\dot{1}$*

1.3.4 Morphisme canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Théorème 1.3.13 *Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z} & \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ a & \to \dot{a} \end{cases}$*
φ est un morphisme de groupes surjectif, appelé morphisme canonique.

Clair

Proposition 1.3.14 *$Ker(\varphi) = n\mathbb{Z}$*

1.3.5 Groupes monogènes

1.3.5.1 Définitions

Définition 1.3.15 *Un groupe $(G, *)$ est dit monogène lorsqu'il peut être engendré par un seul élément.*
Tout élément qui engendre le groupe est appelé générateur du groupe.

En notation additive, le groupe engendré par a est l'ensemble $\{na/n \in \mathbb{Z}\}$.
En notation multiplicative, le groupe engendré par a est l'ensemble $\{a^n/n \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple 1.3.16
- $(\mathbb{Z}, +)$ *est monogène : il est engendré par 1. Il est aussi engendré par* -1.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ *est monogène. Il est engendré par* $\dot{1}$
- $(U_n, \times)$ *est monogène : engendré par* $e^{i\frac{2\pi}{n}}$

Définition 1.3.17 *Un groupe cyclique est un groupe monogène et fini.*

1.3.5.2 Générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Théorème 1.3.18 $\dot{a}$ *est un générateur de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \iff pgcd(a, n) = 1$

car ...

Exemple 1.3.19
- $\dot{3}$ *engendre* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
  On peut le vérifier à la main : $\dot{3} + \dot{3} = \dot{6}$, $\dot{6} + \dot{3} = \dot{1}$, $\dot{1} + \dot{3} = \dot{4}$, $\dot{4} + \dot{3} = \dot{7}$, $\dot{7} + \dot{3} = \dot{2}$, $\dot{2} + \dot{3} = \dot{5}$, $\dot{5} + \dot{3} = \dot{0}$.
- *Les générateurs de* $\mathbb{Z}/6Z$ *sont* $\dot{1}$ *et* $\dot{5}$.
- *Donner les générateurs de* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

1.3.5.3 Isomorphisme

Théorème 1.3.20
- *Tout groupe monogène infini est isomorphe à* $(\mathbb{Z}, +)$
- *Tout groupe G cyclique (monogène et fini) de cardinal n est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ *et si a est un générateur de G,*
  en notation additive $G = \{0, a, 2a, ..., (n-1)a\}$
  en notation multiplicative $G = \{e, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$

Exemple 1.3.21 $(U_n, \times)$ *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Conséquence 1.3.22 *Un groupe monogène est abélien.*

1.3.6 Ordre d'un élément d'un groupe

Définition 1.3.23 *Soit $(G, *)$ un groupe et $x \in G$.*
On dira que x est d'ordre fini lorsque le sous-groupe de G engendré par x, c'est à dire $< x >$ est de cardinal fini. Ce cardinal est alors appelé ordre de x.

Exemple 1.3.24
- $(\mathbb{R}^*, \times)$ *est un groupe infini. Néanmoins,* -1 *est d'ordre fini égal à 2.*
- $(\mathbb{C}^*, \times)$ *est un groupe infini. Les complexes i et 2 sont-ils d'ordre fini ? Si oui, quel est cet ordre ?*

Donc, un groupe infini peut posséder des éléments d'ordre fini.

Théorème 1.3.25 *$(G,*)$ un groupe et $x \in G$ d'ordre fini.*
d est l'ordre de $x \iff d = min\{n \in \mathbb{N}^*/x^n = e\}$

car ...

Théorème 1.3.26 *Soit$(G,*)$ un groupe de neutre e et soit $x \in G$ d'ordre fini d.*
$\forall n \in \mathbb{Z}, x^n = e \iff d$ divise n

car ...

Théorème 1.3.27 *Soit $(G,*)$ un groupe fini. Alors $\forall x \in G$, x est d'ordre fini, et* ***l'ordre de** x* ***divise le cardinal de** G.*

Car ...

Exemple 1.3.28 *Quels sont les sous-groupes monogènes de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$?*

Remarque 1.3.29 *Il existe des groupes infinis dont tous les éléments sont finis.*

Exemple 1.3.30 *On note G l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On le munit de l'addition canonique : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
Vérifier rapidement que $(G, +)$ est un groupe abélien et n'est pas fini.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de G, montrer que cet élément est d'ordre fini à déterminer.

1.4 Anneaux et corps

1.4.1 Définitions

Définition 1.4.1 *Soit A un ensemble muni de deux lois de composition interne : $+$ et $\times$.*
On dira que $(A, +, \times)$ est un ***anneau*** *si et seulement si :*
- *$(A, +)$ est un groupe abélien, de neutre noté le plus souvent 0*
- *$\times$ est*
  - *une loi de composition interne*
  - *associative*
  - *possède un élément neutre, noté le plus souvent 1 ou e*
  - *$\times$ est distributive par rapport à $+$, i.e. :*

$$\forall x, y, z \in A, \begin{cases} a \times (b + c) &= a \times b + a \times c \\ (b + c) \times a &= b \times a + c \times a \end{cases}$$

Remarque 1.4.2 *$(\{0\}, +, \times)$ est un anneau. Dans toute la suite on exclura ce cas, c'est à dire qu'**on suppose que l'anneau** A **possède au moins 2 éléments**.*

Proposition 1.4.3 $\forall a \in A,\ a.0 = 0.a = 0$
$\forall a \in A,\ a.(-1) = (-1).a = -a$

car ...

Proposition 1.4.4 *Si $(A, +, \times)$ est un anneau ayant au moins 2 éléments, alors $1 \neq 0$, i.e. le neutre pour la loi $+$ est différent du neutre de pour la loi $\times$*

car ...

Définition 1.4.5 *L'anneau $(A, +, .)$ est dit commutatif lorsque la loi . est commutative (on rappelle que dans un anneau, la loi $+$ est toujours commutative)*

Définition 1.4.6 *L'anneau $(A, +, .)$ est dit intègre si et seulement si $\forall a, b \in A,\ a.b = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$*

Exemple 1.4.7 *Parmi ces ensembles munis de lois, dire lesquels sont des anneaux. Dans le cas où ce sont des anneaux, sont-ils commutatifs ? intègres ?*
- $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$, $(\mathbb{R}^*, +, \times)$
- $(\mathbb{R}[X], +, \times)$, $(\mathbb{R}_n[X], +, \times)$
- *Si E est un espace vectoriel,* $(L(E), +, \circ)$
- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$
- $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times)$ *où I est un intervalle de $\mathbb{R}$* , $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), +, \times)$
- $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ *où* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1.4.2 Produit fini d'anneaux

Définition-théorème 1.4.8 *Soit $(A_k, +_k, \times_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ des anneaux. On munit le produit $A = A_1 \times ... \times A_n$ de 2 lois internes $+$ et $\times$ définies comme suit :*
La loi $+$ est la loi du produit cartésien des groupes additifs
La loi $\times$ est définie par : $(x_1, ..., x_n) \times (y_1, ..., y_n) = (x_1 \times_1 y_1, ..., x_n \times_n y_n)$.
Alors $(A, +, \times)$ est un anneau appelé produit des anneaux $(A_k, +_k, \times_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$

car ...

Exemple 1.4.9 *On construit ainsi l'anneau $(\mathbb{R}^n, +, \times)$*

1.4.3 Sous-anneau

Définition 1.4.10 *soit $(A, +, \times)$ un anneau et $B \subset A$. On dira que B est un sous-anneau de A ssi*
- $1_A \in B$
- $\forall x, y \in B,\ x - y \in B$
- $\forall x, y \in B, xy \in B$

Remarque 1.4.11 *B est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ ssi*
- *B est un sous-groupe de $(A, +)$*
- *B est stable pour $\times$*
- $1_A \in B$

Remarque 1.4.12 *Un sous-anneau de $(A, +, \times)$ est un anneau pour les lois induites ET ayant le même élément unité que A.*

Remarque 1.4.13 *Comme pour les sous-groupes, la notion de sous-anneau permet de montrer rapidement que certains ensemble munis de 2 lois sont des anneaux.*
D'où l'intérêt de connaître de gros anneaux dans lesquels sont plongés les éventuels sous-anneaux

Exemple 1.4.14 — *$(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un anneau, car sous anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$*
— *$(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau.*

Exercice 1.4.15 — *On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib/a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau.*
— *B est l'ensemble des suites sur $\mathbb{R}$ convergentes. Montrer que $(B, +, \times)$ est un anneau.*

1.4.4 Morphisme d'anneaux

Définition 1.4.16 *Soient $(A, +, \times)$ et $(B, \oplus, \otimes)$ deux anneaux et $f : A \to B$ une application. On dira que f est un* ***morphisme d'anneaux*** *si et seulement si :*
— $\forall a, a' \in A,\ f(a + a') = f(a) \oplus f(a')$
— $f(a \times a') = f(a) \otimes f(a')$
— $f(1_A) = 1_B$

On dira, de plus que f est isomorphisme d'anneaux si et seulement si f est de plus bijective de A sur B

Exemple 1.4.17 *A est l'ensemble des suites convergentes muni des lois $+$ et $\times$ usuelles. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ définie par $f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim(u_n)$. f est un morphisme d'anneaux.*

Exemple 1.4.18 *$A = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $B = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ munis des lois usuelles $+$ et $\times$. On note φ l'application de A dans B définie par $\varphi(f) = f'$. φ est-il un morphisme d'anneaux ?*

Proposition 1.4.19 *f est un morphisme d'anneaux des anneaux $(A, +, \times)$ vers $(B, \oplus, \otimes)$. Alors $Im(f)$ est un sous-anneau de B*

car ...
ATTENTION : $Ker(f)$ n'est pas un sous-anneau de $(A, +, \times)$ car (précisez)

1.4.5 Éléments inversibles d'un anneau

Définition 1.4.20 *On appelle* ***élément inversible d'un anneau*** *$(A, +, \times)$ tout élément a de A qui possède un symétrique pour la loi $\times$, i.e. tout élément $a \in A$ tq $\exists b \in A$ tq $ab = ba = 1_A$*

Remarque 1.4.21 *Dans un anneau, 0 n'est pas inversible. Donc $(A, \times)$ n'est jamais un groupe.*

Notation 1.4.22 *L'ensemble des éléments inversibles de A se note U_A ou $U(A)$.*

Théorème 1.4.23 *$U(A)$ est un groupe pour la loi $\times$.*

car ...

Il faut connaître les éléments inversibles des "grands anneaux".
— $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ et $U(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$
— $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$
— $U(L(E)) = GL(E)$
— $U(\mathcal{M}_n(K)) = GL_n(K)$
— $U(K[X]) = K_0[X] \backslash \{0\}$

Définition 1.4.24 *$(A,+,\times)$ un anneau, et $a \in A$. On dira que a est nilpotent si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k = 0$*
On dit alors que a est nilpotent d'indice (ou d'ordre) k

Proposition 1.4.25 *$(A,+,\times)$ un anneau, et $a \in A$. a est nilpotent $\Longrightarrow 1_A - a$ est inversible.*

car ...

1.4.6 Corps

Définition 1.4.26 *$(A,+,\times)$ un anneau. On dira que c'est un **corps** si et seulement si*
- *A est commutatif (i.e. $\times$ est commutative)*
- *Tout élément non nul de A est inversible (i.e. $U(A) = A\backslash\{0\}$)*

Proposition 1.4.27 *$(A,+,\times)$ est un corps $\Longrightarrow (A,+,\times)$ est un anneau intègre*
La réciproque est fausse

car ...

Proposition 1.4.28 *$(A,+,\times)$ est un corps $\Longrightarrow (A\backslash\{0\},\times)$ est un groupe abélien*

clair

1.5 Idéal d'un anneau commutatif

1.5.1 Généralités

Définition 1.5.1 *$(A,+,\times)$ un anneau commutatif et $I \subset A$. On dira que I est un **idéal** de $(A,+,\times)$ si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{c} I \neq \emptyset \\ \forall x,y \in I, x+y \in I \\ \forall a \in A, \forall x \in I,\ ax \in I \end{array}\right.$$

Remarque 1.5.2 *pour x et y dans l'idéal, $x - y = x + (-1)y \in I$*

Conséquence 1.5.3 *I est un idéal de $(A,+,\times) \iff \left\{\begin{array}{l} I \text{ sous-groupe de } (A,+) \\ \forall a \in A, \forall x \in I,\ ax \in I \end{array}\right.$*

Exemple 1.5.4
- *A est un idéal de $(A,+,\times)$*
- *$n\mathbb{Z}$ est un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}$*
- *Il n'y a pas d'idéal dans $\mathcal{M}_n(K)$ car $\mathcal{M}_n(K)$ n'est pas un anneau commutatif.*

Proposition 1.5.5 *$(A,+,\times)$ et I un idéal de A.*
$I = A \iff 1 \in I$

car ...

Proposition 1.5.6 *Une intersection quelconque d'idéaux est un idéal*

car ...

Proposition 1.5.7 *Soient $I_1,...,I_p$ des idéaux de l'anneau $(A,+,\times)$.*
Soit $I = \{x_1 + ... + x_p / x_1 \in I_1, ..., x_p \in I_p\}$ Cet ensemble se note aussi $I_1 + ... + I_p$
$I_1 + ... + I_p$ est un idéal de $(A,+,\times)$ (Une somme d'idéaux est un idéal)

car ...

Proposition 1.5.8 *Soit f un morphisme d'anneaux de A vers B. Alors $Ker(f)$ est un idéal de A.*

car ...

1.5.2 Idéal engendré par 1 élément

Définition-théorème 1.5.9 *Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et $x \in A$.*
Notons $xA = \{xa/a \in A\}$.
*xA est un idéal de A appelé **idéal engendré par** x. C'est l'intersection des idéaux contenant x.*

car ...

Exemple 1.5.10
- *les $n\mathbb{Z}$ sont des idéaux de $\mathbb{Z}$ (vu au dessus)*
- *Dans l'anneau $\mathbb{R}[X]$, notons $I = \{P \in \mathbb{R}[X]/P(0) = 0\}$. Montrer que $I = X\mathbb{R}[X]$*

1.5.3 Divisibilité dans un anneau commutatif et intègre

Définition 1.5.11 *Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et intègre, et $x, y \in A$.*
On dira que x divise y dans A si et seulement si $\exists a \in A$ tq $y = ax$. On dit aussi que y est multiple de x dans A.

Proposition 1.5.12
- *a divise b et b divise $c \Longrightarrow a$ divise c*
- *a divise a*
- *a divise b et b divise $a \iff \exists u$ inversible dans A tel que $b = ua$*

Proposition 1.5.13 *Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et intègre, et $x, y \in A$.*
x divise $y \iff yA \subset xA$

car ...

1.5.4 Idéaux de $\mathbb{Z}$

Théorème 1.5.14 *Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$*

On a déjà vu que les $n\mathbb{Z}$ sont DES idéaux de $\mathbb{Z}$. Il faut juste prouver qu'il n'y en a pas d'autre. Or un idéal étant un sous-groupe additif, on sait déjà que les $n\mathbb{Z}$ sont les seuls sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ CQFD

1.5.5 PGCD de n entiers

Théorème 1.5.15 *Soient $x_1, ..., x_n$ des entiers.*
Alors $\exists! d \in \mathbb{N}$ tq $x_1\mathbb{Z} + ... + x_n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$

car $x_1\mathbb{Z} + ... + x_n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ et ... L'unicité se déduit de ...

Théorème 1.5.16 *l'entier d du théorème précédent est caractérisé par :*

$$\begin{cases} \forall i, & d \text{ divise } x_i \\ \text{et} & \\ \forall \delta \in \mathbb{Z}, & (\delta \text{ divise tous les } x_i) \Longrightarrow \delta \text{ divise } d \end{cases}$$

car ...

Définition 1.5.17 *Cet unique entier naturel d s'appelle* ***Pgcd*** *de* $x_1, ..., x_n$ *; on le note* $Pgcd(x_1, ..., x_n)$

Conséquence 1.5.18 ***Associativité du Pgcd*** *:* $Pgcd(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$

En effet $x_1\mathbb{Z} + x_2\mathbb{Z} + x_3\mathbb{Z} = (x_1\mathbb{Z} + x_2\mathbb{Z}) + x_3\mathbb{Z} = (x_1 \wedge x_2)\mathbb{Z} + x_3\mathbb{Z} = ((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3)\mathbb{Z}$ et de même, $x_1\mathbb{Z} + x_2\mathbb{Z} + x_3\mathbb{Z} = x_1\mathbb{Z} + (x_2\mathbb{Z} + x_3\mathbb{Z}) = x_1\mathbb{Z} + (x_2 \wedge x_3)\mathbb{Z} = (x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3))\mathbb{Z}$.
Le Pgcd de n entiers va donc se calculer de proche en proche.

Théorème 1.5.19 *Théorème de Bezout :*
$Pgcd(x_1, ..., x_n) = 1 \iff \exists u_1, ..., u_n \in \mathbb{Z},\ x_1u_1 + ... + x_nu_n = 1$

car ...

1.6 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On sait déjà que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien.

1.6.1 Des définitions

On a déjà vu la compatibilité de la relation de congruence modulo n avec la multiplication. Ceci permet de définir une multiplication interne dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ comme suit : $\dot{a} \times \dot{b} = \dot{\overline{ab}}$.

Définition-théorème 1.6.1 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ *est un anneau commutatif de neutre* $\dot{1}$. *C'est un anneau de cardinal* n.
Quand il n'y a pas de doute, cet anneau est seulement désigné sous la forme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *(sans mention des lois)*

Exemple 1.6.2 • *Construire la table de multiplication de* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
• *Dans* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $\dot{2}^4 = \dot{2}$ *car ... en déduire que pour tout entier naturel* n, *7 divise* $2^{4^n} + 5$

Exercice 1.6.3 *Donner les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de* 3^{2016}

1.6.2 Morphisme

Définition-théorème 1.6.4 *L'application* $\begin{cases} \mathbb{Z} \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ k \to & \dot{k} \end{cases}$ *est un morphisme d 'anneaux surjectif, appelé morphisme canonique.*
Son noyau est $n\mathbb{Z}$

car ...

1.6.3 Eléments inversibles pour la multiplication

Théorème 1.6.5 *Soit* $k \in \mathbb{Z}$.
Sa classe $\dot{k}$ *modulo* n *est inversible dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *si et seulement si* $k \wedge n = 1$.

car ...

Remarque 1.6.6 *Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'inverse de $\dot{k}$ s'il existe s'obtient à l'aide de l'identité de Bézout, et donc à partir de l'algorithme d'Euclide.*

Exercice 1.6.7 *Trouver l'inverse de $\dot{16}$ dans $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$.*

Proposition 1.6.8 *n non premier $\Longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas intègre*

car ...

Exemple 1.6.9 *Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\dot{2} \times \dot{3} = \dot{0}$*

Remarque 1.6.10 *Si $pgcd(k, n) \neq 1$ et $\dot{k} \neq \dot{0}$ alors $\dot{k}$ est un diviseur de $\dot{0}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, c'est à dire qu'il existe $\dot{b} \neq \dot{0}$ tel que $\dot{k}\dot{b} = \dot{0}$*

À traiter en exercice.

1.6.4 Le corps $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$

Théorème 1.6.11 *$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps $\iff$ n est premier.*

car ...

1.6.5 Petit théorème de Fermat

Théorème 1.6.12 *p premier.*
- $\forall a \in \mathbb{Z},\ a^p \equiv a\ [p]$
- $\forall a \in \mathbb{Z},\ pgcd(a, p) = 1 \Longrightarrow a^{p-1} \equiv 1\ [p]$ *c'est à dire,* $\dot{a}^{p-1} = \dot{1}$ *dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

La démonstration repose sur :
$1 \leqslant k \leqslant p-1 \Longrightarrow k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$ et donc, si p est premier, pour k tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$, p divise $\binom{p}{k}$.
Puis ...

1.6.6 Le théorème (ou lemme) chinois

Théorème 1.6.13 *$m, n \geqslant 2$ deux entiers tels que $m \wedge n = 1$*
Alors l'application $\begin{cases} \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} & \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \dot{a} & \to (r(a), s(a)) \end{cases}$ *où $r(a)$ est la classe de a modulo m et $s(a)$ est la classe de a modulo n, est un isomorphisme d'anneaux.*

Car ...

Exercice 1.6.14 *Déterminer x entier compris entre 100 et 120 tel que $x - 2$ est divisible par 3 et $x - 5$ est divisible par 7*

Exercice 1.6.15 *Résoudre dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ le système :* $\begin{cases} 6x + 2y & = 2 \\ 4x - 3y & = 4 \end{cases}$

1.6.7 Indicatrice d'Euler

Définition 1.6.16 *Soit n un entier naturel tq $n \geqslant 2$. On appelle indicatrice d'Euler de n l'entier $\varphi(n) = Card\{k \in \mathbb{Z}/1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } k \wedge n = 1\}$ c'est à dire, le nombre d'entiers compris entre 1 et n et premiers avec n.*

Remarque 1.6.17 • *$\varphi(n)$ est le nombre d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*
• *L'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{N}\backslash\{0,1\} & \to \mathbb{N}^* \\ n & \to \varphi(n) \end{cases}$ est appelée fonction indicatrice d'Euler.*

1.6.7.1 Calcul de $\varphi(n)$

— Le crible : voir informatique. On décompose n en produit de nombres premiers (pas simple sitôt que n est grand), puis on élimine parmi tous les entiers entre 1 et n les multiples de tous les nombres premiers entrant dans la décomposition de n
  Exemple 1.6.18 *Déterminer $\varphi(36)$*

— **Théorème 1.6.19** *p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Alors $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha(1 - \frac{1}{p})$*

— **Théorème 1.6.20** *Soit $n \in \mathbb{N}\{0,1\}$, avec $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, les p_j étant premiers et distincts 2 à 2, et les $\alpha_j \in \mathbb{N}^*$.*
  alors $\varphi(n) = n\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right) ... \left(1 - \dfrac{1}{p_k}\right)$
  Se démontre à partir du théorème chinois ...

1.6.7.2 Théorème d'Euler

Théorème 1.6.21 *Soit $n \geqslant 2$ et $a \in \mathbb{Z}$*
$a \wedge n = 1 \Longrightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ [n]$

Car ....

Remarque 1.6.22 *Dans le cas où n est premier il s'agit du petit théorème de Fermat.*
Le théorème d'Euler est une généralisation de ce petit théorème de Fermat au cas où n n'est pas premier, en conservant l'hypothèse $a \wedge n = 1$.

Conséquence 1.6.23 *Si a est premier avec n, alors l'inverse de a dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $a^{\varphi(n)-1}$*

Exemple 1.6.24 *Codage RSA Bernard est émetteur d'un message, et Alice le récepteur (par exemple, Alice est marchand et attend le numéro de CB que Bernard va lui envoyer pour payer son achat.)*
Alice va envoyer à Bernard de quoi coder son message en sorte qu'elle soit la seule à pouvoir le décoder (donc pas de piratage)
Pour ce faire, elle choisit deux nombres premiers p et q très grands. On note $n = pq$ et elle choisit un entier d tel que $d \wedge (p-1)(q-1) = 1$. d est alors inversible dans $\mathbb{Z}/(p-1)(q-1)\mathbb{Z}$.
Soit alors e son inverse dans $\mathbb{Z}/(p-1)(q-1)\mathbb{Z}$ avec $1 < e < (p-1)(q-1)$.
Alice envoie à Bernard le couple (n, e)
Bernard crypte le message numérique M (avec $M < n$) par $M \to M^e \ [n]$.
Voyons maintenant comment Alice le décode : elle le décode par $D \to D^d \ [n]$.
En effet : Alice a reçu $D = M^e$. Alors après son décodage elle a M^{ed}. Il reste à montrer que $M^{ed} = M$.
<u>1er cas : Si $M \wedge n = 1$</u>

$\exists k$ tq $ed = 1 + k(p-1)(q-1)$. On est dans le cas où le théorème d'Euler est applicable : $M^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$; de plus $n = pq \Longrightarrow \varphi(n) = (p-1)(q-1) \Longrightarrow M^{ed} \equiv M\ [n]$. Résultat prouvé dans ce cas.
2ème cas : si M non premier avec n alors p ou q divise M. Prenons p divise M i.e. $\exists \alpha \geqslant 1$ tq $M = p^\alpha m$ avec m entier et $m \wedge p = 1$. Or $0 < M < n = pq \Longrightarrow m < q \Longrightarrow m \wedge q = 1$. Donc par un corollaire de gauss, $m \wedge n = 1$, et le 1er cas conduit à $m^{de} \equiv m\ [n]$.
donc $M^{ed} \equiv (p^\alpha m)^{de} \equiv p^{\alpha de} m^{de} \equiv m.p^{\alpha de}$.
Or $p^{\alpha de} \equiv 0\ [p]$; q premier $\Longrightarrow p^{q-1} \equiv 1\ [q]$. Mais $de = 1 + k(p-1)(q-1) \Longrightarrow p^{de} \equiv p.1^{k(p-1)} \equiv p\ [q]$ et donc $p^{\alpha de} \equiv p^\alpha\ [q]$.
Finalement $p^{\alpha de} - p^\alpha \equiv 0\ [p]$ et $p^{\alpha de} - p^\alpha \equiv 0\ [q]$, donc par le théorème chinois, $p^{\alpha de} - p^\alpha \equiv 0\ [n]$ i.e. $p^{\alpha de} \equiv p^\alpha\ [n]$, donc $M^{de} \equiv m.p^\alpha = M\ [n]$, ce qui achève la démonstration dans ce second cas.
Alice décode effectivement par $D \to D^d$. Elle est la seule à connaître d, donc est la seule à pouvoir décoder l'envoi de Bernard.

1.7 L'anneau $K[X]$ où K est un sous-corps de $\mathbb{C}$

1.7.1 Idéaux de $K[X]$

Théorème 1.7.1 *Les idéaux de $K[X]$ sont les $A.K[X]$ où $A \in K[X]$*

car ...

1.7.2 Pgcd de 2 polynômes

Théorème 1.7.2 *$A, B \in K[X]$ non nuls.*

$$\text{Alors } \exists! G \in K[X] \text{ tel que } \begin{cases} G \text{ unitaire, i.e. de coefficient dominant égal à 1} \\ G \text{ divise } A \text{ et } B \\ \text{tout diviseur de } A \text{ et } B \text{ divise } G \end{cases}$$

car ...

Notation 1.7.3 *Ce polynôme G unique s'appelle PGCD de A et B et se note $PGCD(A, B)$ ou $A \wedge B$.*

Proposition 1.7.4 *$\forall A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec A et B non nuls, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$, $PGCD(\alpha A, \beta A) = PGCD(A, B)$*

car ...

Définition 1.7.5 *On introduit de la même manière que dans $\mathbb{Z}$, par la somme d'idéaux, le Pgcd de n polynômes.*

Proposition 1.7.6 *Si P_1, P_2, P_3 sont des polynômes, $(P_1 \wedge P_2) \wedge P_3 = P_1 \wedge (P_2 \wedge P_3)$*

1.7.3 Bézout, Gauss

Définition 1.7.7 *On dit que les polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement si $Pgcd(A, B) = 1$.*

Remarque 1.7.8 *Attention : si on prend A le polynôme constant égal à 2 et B le polynôme constant égal à 4, alors $A \wedge B = 1$ dans $\mathbb{K}[X]$... On fera donc très attention aux polynômes constants.*

Remarque 1.7.9 $A \wedge B = 1 \iff \forall\lambda \in K^*, \forall\mu \in K^*,\ \lambda A \wedge \mu B = 1$

Voir 1.7.4

Théorème 1.7.10 *$Pgcd(A, B) = 1 \iff \exists U, V \in K[X]$ tels que $AU + BV = 1$*

car ...

Proposition 1.7.11 *$a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$, alors $PGCD(X - a, X - b) = 1$*

car ...

Théorème 1.7.12 *A, B, C des polynômes.*
C divise AB et A et C premiers entre eux $\Longrightarrow C$ divise B.

car

Théorème 1.7.13 *$C \wedge A = 1$ et $C \wedge B = 1 \Longrightarrow C \wedge (AB) = 1$*

Faites le

1.7.4 Polynômes irréductibles de $K[X]$

Définition 1.7.14 *Soit $P \in K[X]$. On dit que P est irréductible si et seulement si $deg(P) \geqslant 1$ et les seuls diviseurs de P sont les polynômes constants non nuls ainsi que les λP avec $\lambda \in K\backslash\{0\}$*

Théorème 1.7.15 ***Théorème de décomposition***
Soit $P \in K[X]$ avec $deg(P) \geqslant 1$
$\exists\lambda \in K\backslash\{0\}$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $\exists(P,..., P_k)$ polynômes irréductibles unitaires distincts 2 à 2, $\exists(n_1, ..., n_k) \in {\mathbb{N}^*}^k$ tels que $P = \lambda P_1^{n_1}...P_k^{n_k}$
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Voir la démonstration dans le cours de Mpsi.

Théorème 1.7.16 ***D'Alembert Gauss*** *: Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet au mons une racine complexe.*

Admis

Conséquence 1.7.17 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degrés 1*

Définition 1.7.18 *Un polynôme qui est produit de polynômes de degré 1 est dit scindé*

Conséquence 1.7.19 *Tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}[X]$*

Ce résultat est un résultat théorique : bien souvent on ne sait pas trouver les racines du polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on ne sait donc pas écrire le polynôme sous sa forme scindée.

Exemple 1.7.20 *Ecrire sous forme scindée dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :*
- $A = X^3 - X^2 + X - 1$
- $B = X^5 - 1$
- $C = X^4 + 4$

Théorème 1.7.21 *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :*
- *les polynômes de degré 1 et*
- *les polynômes de degré 2 sans racine réelle*

Rappel : si λ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ alors $\overline{\lambda}$ est racine de P de même ordre de multiplicité que λ.
C'est la base de la démonstration du théorème.

1.8 Algèbres

1.8.1 Généralités

Définition 1.8.1 *On appelle algèbre sur le corps K un quadruplet $(A, +, \times, .)$ tel que*

1. $(A, +, \times)$ *est un anneau*
2. $(A, +, .)$ *est un espace vectoriel*
3. $\forall \lambda \in K,\ \forall a, b \in A,\ (\lambda.a) \times b = \lambda.(a \times b) = a \times (\lambda.b)$

Une algèbre est dite de dimension finie, lorsque l'espace vectoriel $(A, +, .)$ est de dimension finie. Une algèbre est dite commutative lorsque l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif

Exemple 1.8.2
- $(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$. *Cette algèbre est-elle commutative ? de dimension finie ?*
- $(L(E), +, \circ, .)$. *Cette algèbre est-elle commutative ? de dimension finie ?*
- $(\mathcal{M}_n(K), +, \times, .)$. *Cette algèbre est-elle commutative ? de dimension finie ?*
- $(\mathcal{F}(X, K), +, \times, .)$. *Cette algèbre est-elle commutative ? de dimension finie ?*

1.8.2 Sous-algèbres

Définition 1.8.3 *Soit $(A, +, \times, .)$ une algèbre et $B \subset A$. On dira que B est une sous-algèbre de A si et seulement si*
- $(B, +, \times)$ *est un sous-anneau de* $(A, +, \times)$
- $(B, +, .)$ *est un sous espace vectoriel de* $(A, +, .)$

Proposition 1.8.4 *B est un sous-algèbre de $(A, +, \times, .)$ si et seulement si :*
$\forall x, y \in B,\ \forall \alpha, \beta \in K$
- $\alpha x + \beta y \in B$
- $xy \in B$
- $1_A \in B$

Exemple 1.8.5 $\mathbb{R}_n[X]$ *est il une sous-algèbre de* $(\mathbb{R}[X], +, \times, .)$ *?*

1.8.3 Morphisme d'algèbre

Définition 1.8.6 *A et B deux algèbres et $f : A \to B$.*
f est un morphisme d'algèbre si et seulement si : $f \in L(A, B)$ et f est un morphisme d'anneaux

Proposition 1.8.7 *$f : A \to B$ est un morphisme d'algèbres si et seulement si*
$\forall x, y \in A,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$
- $f(xy) = f(x)f(y)$
- $f(1_A) = 1_B$

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes

Contents

2.1 Sous espaces stables

Définition 2.1.1 *Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, et $u \in \mathcal{L}(E)$*
On dira que F ***est stable par*** *u si et seulement si $u(F) \subset F$, c'est à dire $\forall x \in F,\ u(x) \in F$*
Dans ce cas, la restriction de u à F est un endomorphisme de F. On l'appelle l'endomorphisme induit par u sur F

Conséquence 2.1.2 *Plaçons nous dans le cas où $dim(E) = n$ et $dim(F) = p$.*
Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ une base de E adaptée à F, c'est à dire une base dont les p premiers vecteurs forment une base de F et les $n-p$ autres forment une base d'un supplémentaire de F dans E.
F est stable par $u \iff Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (matrice par blocs) où A est la matrice de u dans la base $(e_1, ..., e_p)$ de F.
Donc F stable par $u \iff \exists \mathcal{B}$ base de E adaptée à F telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est une matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$
Dans ce cas, $det(u) = det(A)det(C) = det(u_{|F})det(C)$

Généralisation : $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$

Les sev F_k sont stables par u si et seulement si $\forall \mathcal{B}$ base de E avec $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{B}_k$ et $\mathcal{B}_k$ base de F_k, alors $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & A_p \end{pmatrix}$

On dit que u est diagonalisable par blocs.

Théorème 2.1.3 *Soit E ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

u est diagonalisable par blocs si et seulement si il existe $F_1, ..., F_p$ des sev de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$ avec $\forall k,\ F_k$ est stable par u.

Proposition 2.1.4 *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. u et v commutent $\Longrightarrow Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par v.*

À vous de faire cette démonstration.

2.2 Éléments propres

2.2.1 Cas d'un endomorphisme

Définition 2.2.1 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$.*
*On dira que λ est **valeur propre de** u si et seulement si $\exists x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$*
*Un tel vecteur x est appelé **vecteur propre de** u associé à la valeur propre λ.*

D'où

Définition 2.2.2 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$*

*On dira que x est **vecteur propre de** u* $\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \neq 0 \\ \textit{et} \\ \exists \lambda \in K,\ u(x) = \lambda x \end{array} \right.$

Remarque 2.2.3 *Le vecteur nul 0 n'est pas un vecteur propre.*

Proposition 2.2.4 *λ est valeur propre de u*

$$\begin{array}{cc} \Longleftrightarrow & Ker(\lambda id_E - u) \neq \{O_E\} \\ \Longleftrightarrow & L\text{'endomorphisme } \lambda id_E - u \text{ n'est pas injectif} \end{array}$$

Conséquence 2.2.5 ***Important***
u non injectif $\Longleftrightarrow$ 0 est valeur propre de u

Clair ...

Proposition 2.2.6 *x est vecteur propre de $u \Longleftrightarrow x \neq 0$ et $Vect(x)$ est stable par u*

En effet ...

Remarque 2.2.7 *Donc, chercher les vecteurs propres de u revient à chercher les droites vectorielles stables par u.*

Définition 2.2.8 *$u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u.*
Le sous espace $Ker(\lambda id_E - u) = Ker(u - \lambda id_E)$ est appelé ***sous-espace propre de*** *u associé à la valeur propre λ et souvent noté $E_\lambda(u)$*

Remarque 2.2.9
- *Un sous espace propre n'est jamais réduit au vecteur nul, donc est toujours de dimension supérieure ou égale à 1*
- *Un sev propre est constitué de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre et du vecteur nul(qui n'est pas considéré comme un vecteur propre).*

Exemple 2.2.10
- *$E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ la base canonique. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice dans $\mathcal{B}$: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que u a exactement 2 valeurs propres qui sont 1 et 2.*
- *$u = \alpha id_E$. Montrer que u a 1 et 1 seule valeur propre.*
- *$E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Soit $D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \to & f' \end{array} \right.$*
  Montrer que tout réel λ est valeur propre de D, et déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.
- *$E = K[X]$ et $D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \to & P' \end{array} \right.$. Montrer que D n'a qu'une seule valeur propre à déterminer (penser à travailler sur le degré des polynômes). Quel est alors le sev propre de D ?*

Définition 2.2.11 *L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le* ***spectre de*** *u et noté $Sp(u)$.*

2.2.2 Sous-espaces propres

Somme directe de sev

Définition 2.2.12 *Soit E un espace vectoriel.*
Soit F, G, H des sev de E. On sait que $F+G+H$ est encore un sev de E. Mais rien ne dit que ce sev c'est E tout entier. Peu importe. On notera SM cet espace somme : $SM = F+G+H$. $SM \subset E$.
On dira que la somme $F+G+H$ est directe si et seulement si $\forall u \in F+G+H$, $\exists!(x,y,z) \in F \times G \times H$ tq $u = x+y+z$.
Dans ce cas, pour dire que la somme possède cette propriété de somme directe, on écrira $F+G+H = F \oplus G \oplus H$

Exemple 2.2.13 *Dans $\mathbb{R}^3$, $F = Vect(e_1)$ où $e_1 = (1,0,0)$, $G = Vect(e_2)$ où $e_2 = (0,1,0)$ et $H = Vect(e_3)$ où $e_3 = (1,1,0)$.*
Soit $u = (2,3,0)$, $u \in F+G+H$ car $u = 2e_1 + 3e_2$. Mais la somme n'est pas directe car u s'écrit aussi $u = e_2 + 2e_3$ La décomposition n'est pas unique.
Second exemple : $E = \mathbb{R}^4$, $F = Vect(e_1)$ où $e_1 = (1,0,0,0)$, $G = Vect(e_2)$ où $e_2 = (1,1,0,0)$ et $H = Vect(e_3)$ où $e_3 = (1,1,1,0)$. La somme est directe, car soit $u \in F+G+H$, alors $\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. Un vecteur de la somme s'écrit donc $(\alpha+\beta+\gamma, \beta+\gamma, \gamma, 0)$, et cette écriture est unique (à vérifier).

Théorème 2.2.14 *Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est une famille libre.*
Autrement dit, $\forall \lambda_1, .., \lambda_p$ valeurs propres de u deux à deux distinctes, et $\forall x_1, ..., x_p$ vecteurs propres tels que x_k est vecteur propre associé à λ_k, alors $(x_1, ..., x_p)$ est libre

Car ...

Conséquence 2.2.15 *La somme d'une famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2 est directe*

car

Conséquence 2.2.16 *Si* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$*, alors* u *possède au maximum* n *valeurs propres distinctes, autrement dit,* $Card(Sp(u)) \leqslant dim(E)$

Car chacun des sous espaces propres étant de dimension supérieure ou égale à 1, et les sous espaces propres étant en somme directe, il ne peut pas y avoir plus de n sous-espaces propres.

Théorème 2.2.17 u *et* $v \in \mathcal{L}(E)$*. Si* u *et* v *commutent alors tout sev propre de* u *est stable par* v*.*

En effet, si u et v commutent, alors $u - \lambda id_E$ et v commutent et donc, $\mathrm{Ker}(u - \lambda id_E)$ est stable par v.

Conséquence 2.2.18 *Tout sev propre de* u *est stable par* u

car u et u commutent ... (on peut aussi faire une démonstration directe)

2.2.3 Cas d'une matrice carrée

Définition 2.2.19 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(K)$

— *Soit* $\lambda \in K$*. On dit que* λ *est* ***valeur propre*** *de* A

$$\begin{array}{ll} \textit{si et seulement si} & \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0 \textit{ et } AX = \lambda X \\ \textit{si et seulement si} & \lambda I_n - A \textit{ est non inversible} \\ \textit{si et seulement si} & det(\lambda I_n - A) = 0 \end{array}$$

— *On dira que* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ *est* ***vecteur propre*** *de* A *si et seulement si* $X \neq 0$ *et* $\exists \lambda \in K,\ AX = \lambda X$

— *L'ensemble des valeurs propres de la matrice* A *s'appelle le* ***spectre*** *de* A *et se note* $Sp(A)$

— *L'ensemble des* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ *tq* $AX = \lambda X$ *est appelé* ***sev propre*** *de* A *associé à la valeur propre* λ *et se note souvent* $E_\lambda(A)$

Théorème 2.2.20 $Dim(E) = n$*,* $\mathcal{B}$ *une base de* E*. Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *de matrice* A *dans la base* $\mathcal{B}$ *:* $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$*. Alors*

— u *et* A *ont le même spectre.*

— x *vecteur propre de* u *associé à* $\lambda \Longleftrightarrow$ *la matrice colonne* X *des coordonnées de* x *dans la base* $\mathcal{B}$ *est vecteur propre de* A *associé à* λ

clair car ..

Conséquence 2.2.21 *Deux matrices semblables ont le même spectre*

Rappel : Les matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables $\Longleftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$

Mais la réciproque de ce théorème est fausse : les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont le même spectre, mais elles ne sont pas semblables. En effet, **seule I est semblable à** I car $P^{-1}IP = P^{-1}P = I$, et B n'est pas la matrice I, donc I et B ne sont pas semblables, pourtant elles ont le même spectre $\{1\}$.

Proposition 2.2.22 $0 \in Sp(A) \iff det(A) = 0$
i.e. Toute matrice non inversible possède 0 *pour valeur propre*

C'est clair en revenant à la définition d'une valeur propre. Mais c'est très important.

Théorème 2.2.23 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *On sait que* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Alors* $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset Sp_{\mathbb{C}}(A)$

Clair car ...

Remarque 2.2.24 *Il n'y a pas nécessairement égalité : par exemple* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrer que* $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ *et déterminer* $Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

Remarque 2.2.25 *Ce théorème se généralise à tous corps* $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$.

2.2.4 Polynôme caractéristique

2.2.4.1 Des définitions

Définition 2.2.26 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle ***polynôme caractéristique de*** A *le polynôme noté* $\chi_A = det(XI_n - A) = (-1)^n det(A - XI_n)$

Exemple 2.2.27 • *Déterminer* χ_A *où* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *On trouve :* $\chi_A = (X-2)^2 X$

• *Même question pour la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Théorème 2.2.28 $Sp(A)$ *est l'ensemble des racines de* χ_A

Clair en revenant à la définition d'une valeur propre, mais fondamental : pour déterminer les valeurs propres de A on calcule son polynôme caractéristique et on en cherche les racines.

Proposition 2.2.29 *Soit* A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
— A *et* B *semblables* $\Longrightarrow \chi_A = \chi_B$.
— $\chi_A = \chi_{{}^tA}$

car $\exists P \in GL_n(K)$ tel que $B = P^{-1}AP$.
Alors $\chi_B = det(XI - B) = det(XP^{-1}IP - P^{-1}AP) = det(P^{-1}(XI - A)P) = det(XI - A) = \chi_A$
D'où

Définition 2.2.30 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $dim(E) = n$.
On appelle ***polynôme caractéristique de u*** *le polynôme noté* χ_u *défini par*

$$\chi_u = det(Xid_E - u) = (-1)^n det(u - Xid_E)$$

Exemple 2.2.31 $E = K_n[X]$ *et* $D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \to & P + P' \end{array} \right.$. *Quel est le polynôme caractéristique de D ?*

2.2.4.2 Coefficients

Proposition 2.2.32 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$\chi_A(X) = X^n - tr(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n det(A)$

Car ...

Conséquence 2.2.33 — *Dans le cas où $n = 2$, le polynôme caractéristique s'obtient très facilement c'est $X^2 - tr(A)X + det(A)$*
- — *$K = \mathbb{C} \Longrightarrow Sp_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$*
- — *$K = \mathbb{R}$ et n impair $\Longrightarrow Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$*
- — *$Card(Sp(A)) \leqslant n$ (on le savait déjà)*

2.2.5 Quelques cas particuliers

Proposition 2.2.34 *Si A est triangulaire :* $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a_{n-1} & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}$

alors $\chi_A = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$

Remarque 2.2.35 *On a vu que :* $\chi_A = det(XI_n - A) = (-1)^n det(A - XI_n)$

La seconde expression peut être plus pratique dans un calcul car elle n'impose pas de changer tous les signes des coefficients de A.

Théorème 2.2.36 — *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(K)$. Alors $\chi_M = \chi_A.\chi_C$*
- — *Si F est un sev stable par u, notons $\tilde{u}$ la restriction de u à F. Alors $\chi_{\tilde{u}}$ divise χ_u dans $\mathbb{K}[X]$*

car ...

2.2.5.1 Multiplicité d'une valeur propre

Définition 2.2.37 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in Sp(A)$.*
On appelle ***ordre de multiplicité de*** *λ sa multiplicité en tant que racine du polynôme χ_A.*
Cette multiplicité se notera souvent mul(λ)
Donc $mul(\lambda) = r \iff \chi_A = (X-\lambda)^r R$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$ et $R(\lambda) \neq 0$

Attention : il y aura deux manières de compter les valeurs propres :
1) on énumère les valeurs propres distinctes 2 à 2 : $\lambda_1, ...\lambda_p$
2) on les compte avec leur multiplicité, i.e. on écrit chaque valeur propre autant de fois que sa multiplicité.

Par exemple soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $Sp(A) = \{1, 2\}$ mais parler des valeurs propres comptées avec leur multiplicité revient à écrire l'ensemble des valeurs propres ainsi $\{1, 2, 2, 2\}$, i.e. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 2$

Remarque 2.2.38 *Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres se lisent sur la diagonale et leur multiplicité aussi. Ce résultat est en général faux pour une matrice non triangulaire*

Proposition 2.2.39 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si χ_A est scindé (ce qui est le cas sur $\mathbb{C}$), alors A possède n valeurs propres comptées avec leur multiplicité et*

$$\mathrm{tr(A)} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \lambda_{\mathrm{k}} \text{ et } \det(\mathrm{A}) = \prod_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} \lambda_{\mathrm{k}}$$

Car $\chi_A = X^n - \mathrm{tr(A)X^{n-1}} + ... + (-1)^{\mathrm{n}}\det(\mathrm{A}) = \prod_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X} - \lambda_{\mathrm{k}})$

Théorème 2.2.40 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in Sp(A)$ avec $mul(\lambda) = m$.*
Alors $1 \leqslant \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{m}$

Pour le démontrer, on va travailler sur les endomorphismes. Soit E ev de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = A$. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $E_\lambda(u)$, avec $dim(E_u) = k$, qu'on complète pour former une base $\mathcal{B}'$ de E. Alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(u) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & B \\ 0 & 0 & \lambda & \\ \hline & 0 & & C \end{array}\right)$ donc $\chi_u = (X - \lambda)^k \chi_C$ et donc $(X - \lambda)^k$ divise χ_u d'où $k \leqslant m$

Théorème 2.2.41 *Cas particuliers*

— *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_A scindé et à racines simples. Alors A est semblable à une matrice diagonale*
— *$dim(E) = n$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé et à racines simples, alors il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.*

Se démontre à l'aide de 2.1.3

2.3 Diagonalisation : on suppose dans la suite que E est de dimension finie

2.3.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 2.3.1 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dira que u est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.*

Une telle base est constituée de vecteurs propres car si $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ alors $\forall k,\ u(e_k) = a_k e_k$ où e_k est le k^{ime} vecteur de $\mathcal{B}$, donc non nul. C'est un vecteur propre.

Théorème 2.3.2 *Soit $u \in L(E)$. u est diagonalisable $\iff$ E est somme directe de ses sev propres.*

car ...

Exemple 2.3.3 *Cas des projections : une projection est diagonalisable.*

Soit p une projection sur F de direction G. On sait que F et G sont supplémentaires $F \oplus G = E$. $\forall x \in F,\ p(x) = x$ donc les vecteurs de F sont des vecteurs propres. De même $\forall x \in G,\ p(x) = 0$, les vecteurs de G sont aussi des vecteurs propres. Si on note $\mathcal{B}_1$ une base de F et $\mathcal{B}_2$ une base de G, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E et $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right)$, p est donc diagonalisable (on verra plus tard une autre démonstration du fait qu'une projection est un endomorphisme diagonalisable).

Exemple 2.3.4 *Cas des symétries : une symétrie est diagonalisable et il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de la symétrie est du type* $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$

À vous de le faire ...

2.3.2 Matrice diagonalisable

Définition 2.3.5 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On dira que A est* ***diagonalisable*** $\iff$ *A est semblable à une matrice diagonale, i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists D$ diagonale tq , $D = P^{-1}AP$*

Proposition 2.3.6 *A est diagonalisable si et seulement tout endomorphisme u dont la matrice est A dans une base $\mathcal{B}$ est diagonalisable*

Oui

Exemple 2.3.7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

1. *Déterminer χ_A et vérifier que $\chi_A = (X+1)(X-1)(X-2)$*
2. *En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.*
3. *Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$*

Exemple 2.3.8 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer χ_A sous forme factorisée.*
2. *Déterminer les sev propres de A.*
3. *A est-elle diagonalisable ?*

Exemple 2.3.9 *Soit* $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer* χ_B *sous forme factorisée.*
2. *B est-elle diagonalisable ?*
3. *Comparer avec 16.3.13*

2.3.3 Premiers critères de diagonalisation

Théorème 2.3.10 *Soit* E *un ev tel que* $dim(E) = n$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u *est diagonalisable*
2. *Il existe une base de* E *composée uniquement de vecteurs propres de* u *;*
3. E *est somme directe de ses sev propres*
4. χ_u *est scindé et* $\forall \lambda \in Sp(u),\ dim(E_\lambda(u)) = mul(\lambda)$

Car : $1 \iff 2$ c'est la définition : les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans laquelle u est diagonale sont des vecteurs propres
$1 \iff 3$ c'est le théorème 2.3.2
$1 \iff 4$ car ...

On peut retrouver le théorème suivant :

Théorème 2.3.11 χ_u *est scindé et* χ_u *à racines simples* $\Longrightarrow$ u *est diagonalisable*

car si χ_u est à racines simples, alors les valeurs propres sont de multiplicité 1 et donc la dimension des sev propres étant comprise entre 1 et la multiplicité, la dimension des sev propres est égale 1, c'est à dire à la multiplicité des valeurs propres. On utilise alors le critère 4.

Remarque 2.3.12 *Ce théorème est une autre manière d'écrire le théorème 2.2.41*

Remarque 2.3.13 ***ATTENTION La réciproque est fausse. il ne s'agit là que d'une implication***

Donner un exemple d'endomorphisme diagonalisable dont le polynôme caractéristique n'est pas à racines simples.

Exemple 2.3.14 *Reprendre l'exemple 2.3.9*

On voit donc qu'il est essentiel de connaître la dimension des sev propres. Pour cela on dispose du

Théorème 2.3.15 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in Sp(A)$. *Alors* $\dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})) = \mathrm{n} - \mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})$

C'est clair : c'est le théorème du rang. Mais c'est très pratique.

Exemple 2.3.16 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *Montrons avec le minimum de calculs que A est diagonalisable.*
$rg(A) = 1$ *donc 0 est valeur propre de A et* $\dim \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) = 2$. *A possède 3 valeurs propres comptées avec leur multiplicité : 0, 0,* λ. *De plus* $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 3 = 0 + 0 + \lambda$. *Donc* $Sp(A) = \{0, 3\}$. *On sait que 0 est valeur propre double, donc 3 est valeur propre simple, donc* $1 \leqslant \dim \mathrm{E}_3(\mathrm{A}) \leqslant 1$, *i.e.* $\dim \mathrm{E}_3(\mathrm{A}) = 1$ *et finalement A est diagonalisable.*

Exemple 2.3.17 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Il est clair que* $Sp(A) = \{2\}$.

$\dim \mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = 3 - \mathrm{rg}\,(\mathrm{A} - 2\mathrm{I})$. *Or* $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *qui est de rang 1, donc*
$\dim \mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = 3 - 1 = 2$.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

2.4 Trigonalisation

2.4.1 Trigonalisation

Rappel
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire alors les valeurs propres de A sont ses éléments diagonaux et $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - a_{k,k})$. Voir 2.2.34

Définition 2.4.1 $dim(E) = n,\ u \in \mathcal{L}(E)$
On dira que u est ***trigonalisable*** *si et seulement si il existe* $\mathcal{B}$ *base de E telle que* $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ *est triangulaire supérieure*

Définition 2.4.2 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On dira que A est trigonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire supérieur*

Théorème 2.4.3 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est trigonalisable $\iff$ *A est la matrice d'un endomorphisme trigonalisable*
$\iff$ *l'endomorphisme canoniquement associé à A est trigonalisable*

Proposition 2.4.4 *u diagonalisable* $\Longrightarrow$ *u est trigonalisable*

clair ...

Théorème 2.4.5 *Une matrice/un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé*

car ...

Conséquence 2.4.6 *Tout endomorphisme d'un* $\mathbb{C}-$*espace vectoriel est trigonalisable*
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est trigonalisable*

Car tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, et donc χ_u et χ_A sont scindés sur $\mathbb{C}$

Proposition 2.4.7 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Si A est trigonalisable, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité*

clair car $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ où les λ_k sont les valeurs propres comptées avec leur multiplicité. Soit $T = (t_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ triangulaire supérieure semblable à A. Alors $\chi_A = \chi_T$ et donc les racines de χ_T sont les λ_k, mais T étant triangulaire, les racines de χ_T sont les $t_{k,k}$. Donc les éléments diagonaux de T sont bien les valeurs propres de A.

Conséquence 2.4.8 *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que χ_u scindé, alors* $\mathrm{tr(u)} = \sum \lambda_\mathrm{k}$ *et* $\det(\mathrm{u}) = \prod \lambda_\mathrm{k}$ *où les λ_k sont les valeurs propres de u comptées avec leur multiplicité.*
Bien entendu, il y a la même conséquence pour les matrices.

2.4.2 Application : Détermination de la valeur propre de plus grand module (méthode des traces)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que A est semblable à une matrice T triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.
On suppose les valeurs propres rangées dans le sens des modules décroissants et on suppose en outre que **la valeur propre de plus grand module est unique**, i.e. si $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ on a classé les valeurs propres en sorte que $|\lambda_p| \leqslant ... \leqslant |\lambda_2| < |\lambda_1|$. Notons alors $m = mul(\lambda_1)$.

alors $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1^k & & & \\ & & & \lambda_2^k & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_p^k \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathrm{tr(T^k)} = \sum\limits_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{p}} \lambda_\mathrm{k}^\mathrm{k}.\mathrm{mul}(\lambda_\mathrm{j}^\mathrm{k})$ et donc $\mathrm{tr(A^k)} = \sum\limits_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{p}} \lambda_\mathrm{j}^\mathrm{k}.\mathrm{mul}(\lambda_\mathrm{j})$

On suppose enfin que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{tr(A^k)} \neq 0$

Pour $r \geqslant 2$, $\lambda_r^k = o_{k \to +\infty}(\lambda_1^k)$ donc $\dfrac{\mathrm{tr(A^{k+1})}}{\mathrm{tr(A^k)}} \sim \dfrac{m\lambda_1^{k+1}}{m\lambda_1^k} \sim \lambda_1$.

Et donc, on obtient assez simplement à l'aide de Python une approximation de la valeur de $\lambda_1 = \lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{\mathrm{tr(A^{k+1})}}{\mathrm{tr(A^k)}}$

2.5 Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

2.5.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.5.1 *Soit $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$*

1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On notera $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par* $P(u) = a_0 id_E + a_1 u + a_2 u^2 + ... + a_n u^n$
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On notera $P(A)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par* $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n$

Remarque 2.5.2 *Ne pas oublier id_E dans $P(u)$, ni I_n dans $P(A)$*
Exemple : si $P = 2 + X - 3X^2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $P(u) =$

Proposition 2.5.3 $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}, \mathcal{B}$ *une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathcal{M}at_\mathcal{B}(u)$*
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $P(A) = \mathcal{M}at_\mathcal{B}(P(u))$

Car ...

Théorème 2.5.4 *Sot $u \in \mathcal{L}(E)$*
L'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ définie par $P \to P(u)$ est un morphisme d'algèbres
i.e.

— $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ (\alpha P + \beta Q)(u) = \alpha P(u) + \beta Q(u)$
— $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$
— $1_{\mathbb{K}[X]}(u) = id_E$

car ...

Conséquence 2.5.5 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$
$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ P(u)$ *et* $Q(u)$ *commutent et donc,* $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)$ *et* u *commutent*

Clair, car $PQ = QP$ de même que $XP = PX$ (on peut aussi le prouver directement)

Conséquence 2.5.6 $\ker(P(u))$ *et* $Im(P(u))$ *sont stables par* u.

Voir 2.1.4

Définition 2.5.7 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$
On appelle ***polynôme annulateur de*** u *tout polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $P(u) = 0$.
Les polynômes annulateurs de u *sont les éléments de* $\ker(\varphi) = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(u) = 0\}$.

Proposition 2.5.8 $\ker(\varphi)$ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$.

car on sait que le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

Définition 2.5.9 $Im(\varphi) = \{P(u) / P \in \mathbb{K}[X]\}$ *est notée* $\mathbb{K}[u]$

On sait que les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont les $D.\mathbb{K}[X]$. On en déduit la définition :

Définition 2.5.10 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On appelle* ***polynôme minimal de*** u *l'unique polynôme noté* Π_u *s'il existe tel que :*

$$\begin{cases} \Pi_u(u) = 0 \\ \forall Q \in \mathbb{K}[X], Q(u) = 0 \Longrightarrow \Pi_u \text{ divise } Q \\ \Pi_u \text{ unitaire.} \end{cases}$$

Proposition 2.5.11 π_u *existe* $\iff$ $Ker(\varphi) \neq \{0\}$ *i.e. il existe un polynôme annulateur non nul.*

Remarque 2.5.12 *Le polynôme minimal, s'il existe, n'est jamais nul*

Proposition 2.5.13 *Le polynôme minimal, s'il existe est un polynôme annulateur. C'est le polynôme annulateur unitaire de plus petit degré.*

car ...

Remarque 2.5.14 *On a les mêmes définitions concernant les matrices : polynôme annulateur d'une matrice, noyau de* φ, *polynôme minimal d'une matrice.*

Exemple 2.5.15 $E = F \oplus G$ *avec* $F \neq \{0\}$ *et* $G \neq \{0\}$. *Soit* f *la projection sur* F *de direction* G.
— *Donner un polynôme annulateur de* f.
— *Donner le polynôme minimal de* f

Exemple 2.5.16 *Reprendre l'exemple du dessus dans le cas d'une symétrie par rapport à* F *de direction* G.

Exemple 2.5.17 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
Montrer que le polynôme minimal de A *est* $\Pi_A = X^2 - 5X + 6$.

Théorème 2.5.18 E *de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$.
u *possède alors un polynôme annulateur non nul, et donc possède un polynôme minimal.*

Car $dim(E) = n \Longrightarrow \dim(\mathcal{L}(\mathrm{E})) = \mathrm{n}^2$, la famille $(id, u, u^2, ..., u^{n^2})$ qui est une famille de $n^2 + 1$ éléments dans un espace de dimension n^2 est donc une famille liée. Donc il existe $a_0, ..., a_{n^2}$ non tous nuls tels que $a_0 id + a_1 u + ... + a_{n^2} u_{n^2} = 0$. Le polynôme $P = a_0 + a_1 X + ... + a_{n^2} X^{n^2}$ annule donc u.

Conséquence 2.5.19 *Toute matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *admet un polynôme minimal.*

Théorème 2.5.20 *Si* Π_u *existe, notons* $d = deg(\Pi_u)$. *Alors la famille* $\{id, u, .., u^{d-1}\}$ *est une base de* $\mathbb{K}[u]$

car ...

Exemple 2.5.21 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que* $\Pi_A = X^2 - 3X + 2$.
2. *Déterminer le reste dans la division euclidienne de* X^{12} *par* Π_A.
3. *En déduire une expression simple de* A^{12} *en fonction de* I *et* A.

2.5.2 Polynômes et éléments propres

Théorème 2.5.22 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$

1. λ *valeur propre de* $u \Longrightarrow P(\lambda)$ *valeur propre de* $P(u)$, *et* x *vecteur propre de* u *associé à* $\lambda \Longrightarrow x$ *vecteur propre de* $P(u)$ *associé à* $P(\lambda)$.
2. *Si* P *annule* u *alors toute valeur propre de* u *est racine de* P,
   i.e. $Sp(u) \subset \{$ *racines de* $P\}$

Ce théorème se transpose pour les matrices.

Car ...
ATTENTION : L'inclusion dans le second point du théorème 2.5.22 peut être une inclusion stricte.

Exemple 2.5.23 $P = X^2 - X$ *annule* id_E. *0 est racine de* P, *mais 0 n'est pas valeur propre de* id_E

Théorème 2.5.24 *Si* Π_u *est le polynôme minimal de* u *alors les valeurs propres de* u *sont exactement les racines de* Π_u

car ...

Conséquence 2.5.25 Π_u *et* χ_u *ont exactement les mêmes racines ; ce qui peut les différencier c'est l'ordre de multiplicité de ces racines.*

ATTENTION : il n'y a pas de lien entre l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ et l'ordre de multiplicité de λ racine de Π_u. Pour nous en convaincre, voici quelques exemples :

Exemple 2.5.26 1. *$A = I_n$, alors $\Pi_A = X - 1$. 1 est valeur propre de multiplicité n, mais 1 est racine simple de Π_A.*

2. *$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 1 est valeur propre de B de multiplicité 2. Montrer que $\Pi_B = (X-1)^2$. Alors dans ce cas, la multiplicité de 1 en tant que valeur propre et en tant que racine du polynôme minimal est ici la même.*

3. *$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 1 est valeur propre de multiplicité 3. Montrer que $\Pi_C = (X-1)^2$. Ici encore la multiplicité de la valeur propre 1 est différente de la multiplicité de 1 en tant que racine de Π_C.*

2.5.3 Théorème de Cayley Hamilton

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Le calcul donne $\chi_A = X^2 - 3X + 2$.
Calculer $\chi_A(A)$.

Théorème 2.5.27 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. Alors $\chi_u(u) = 0$.*
*i.e. Le polynôme caractéristique de u est **un** polynôme annulateur de u.*
De même $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow \chi_A(A) = 0$

Démonstration non exigible.

Conséquence 2.5.28 $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. $\mathrm{u} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \Longrightarrow \Pi_{\mathrm{u}}$ *divise* χ_u.

Conséquence 2.5.29 $\deg(\Pi_u) \leqslant \dim \mathrm{E}$

Exemple 2.5.30 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.*

1. *Donner un polynôme annulateur de A.*
2. *Donner* $\dim \ker(\mathrm{A} - 2\mathrm{I})$
3. *Le polynôme $(X-1)(X-2)$ est-il un polynôme annulateur de A ?*

2.5.4 Théorème de décomposition des noyaux

Lemme 2.5.31 *Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*
Alors $\ker((PQ)(u)) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$

Car ... Conséquence :

Théorème 2.5.32 ***Théorème de décomposition des noyaux**. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(P_k)_{k \in [\![1,r]\!]}$ une famille de polynômes premiers entre eux 2 à 2.*
Alors : $\ker\left(\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker P_k(u)$

Par récurrence sur r.

Conséquence 2.5.33 *$u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \prod_{k=1}^{r} P_k$ où les P_k sont des polynômes premiers entre eux deux à deux.*
P annule $u \Longrightarrow E = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker(P_k(u))$

car $\ker P(u) = E$.

Théorème 2.5.34 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$.*
On suppose χ_u scindé sur $\mathbb{K}[X]$: $\chi_u = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ où les λ_k sont distincts deux à deux.
Alors $E = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker((u - \lambda_k id)^{\alpha_k})$.

car $\chi_u(u) = 0$ par Cayley Hamilton, et $\forall j, k, \ \ \text{tq } j \neq k, \ (X - \lambda_j)^{\alpha_j} \wedge (X - \lambda_k)^{\alpha_k} = 1$. Il suffit ensuite d'utiliser le théorème de décomposition des noyaux

2.5.5 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Théorème 2.5.35 *$dim(E) = n$. $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule u.*

car ...

Exemple 2.5.36
1. *Une projection annule $X^2 - X = X(X-1)$ qui est scindé à racines simples, donc une projection est diagonalisable.*
2. *Une symétrie est diagonalisable : dites pourquoi*
3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = id$. u est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?*

Conséquence 2.5.37 *Le polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable u est $\Pi_u = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)$ où $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ avec les λ_k sont distincts 2 à 2.*

Théorème 2.5.38 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim \mathrm{E} = \mathrm{n}$.*
u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples

car ...

Exemple 2.5.39 *Reprendre l'exemple 2.5.30 et en particulier la question 3*

2.5.6 Cas d'un endomorphisme induit

Théorème 2.5.40 *Soit $u \in L(E)$ et F un sev stable de E stable par u. Alors*
1. *$\Pi_{u_{|F}}$ divise Π_u*
2. *u diagonalisable $\Longrightarrow u_{|F}$ diagonalisable.*

car ...

2.5.7 Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes

Définition 2.5.41 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. *On dira que* u *est* ***nilpotent*** *si et seulement si* $\exists p \in \mathbb{N},\ u^p = 0$ *(on rappelle que* $u^0 = id$*)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *on dira que* A *est nilpotente si et seulement si* $\exists p \in \mathbb{N},\ A^p = 0$.
On appelle ***indice de nilpotence*** *de* u *(resp* A*) le plus petit entier naturel* p *tel que* $u^p = 0$ *(resp* $A^p = 0$*).*
i.e. l'entier p *s'il existe tel que* $u^p = 0$ *et* $u^{p-1} \neq 0$

Remarque 2.5.42 *Tous les endomorphismes ne sont pas nilpotents : par exemple* id_E *n'est pas nilpotent*

Exemple 2.5.43 *Dans* $\mathbb{K}_n[X]$ $D : P \to P'$ *est nilpotent d'indice* $n+1$

Proposition 2.5.44 $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. u *est nilpotent* $\Longrightarrow$ u *n'est pas inversible*

car ...

Proposition 2.5.45 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. u *est nilpotent* $\iff \chi_u = X^n$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A *est nilpotente* $\iff \chi_A = X^n$.

car ...

Conséquence 2.5.46 $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. u *est nilpotent* $\Longrightarrow$ u *est trigonalisable et* $Sp(u) = \{0\}$

car ...

Conséquence 2.5.47 $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. u *est nilpotent* $\Longrightarrow$ *son indice de nilpotence est inférieur à* $\dim(\mathrm{E})$.

Conséquence 2.5.48 $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$.
u *est nilpotent et* u *diagonalisable* $\Longrightarrow u = 0$. *En d'autres termes, mis à part l'endomorphisme nul aucun endomorphisme nilpotent n'est diagonalisable.*

car ...

EXERCICE à savoir résoudre :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent d'indice p.
Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Justifier l'existence de x.
Montrer que $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est libre.

2.5.8 Endomorphismes à polynôme annulateur scindé

On a vu dans le théorème 2.4.5 que si χ_u est scindé alors u est trigonalisable.
On peut améliorer ce théorème.

Théorème 2.5.49 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$.
u *est trigonalisable* $\iff \exists P$ *polynôme scindé et annulateur de* u

car : le sens direct c'est le théorème 2.4.5
Le sens réciproque : P annulateur est scindé $\Longrightarrow \Pi_u$ est scindé, donc χ_u scindé et là encore le théorème 2.4.5 permet de conclure.

Théorème 2.5.50 *S'il existe un polynôme scindé annulant u, alors E se décompose en somme directe de sev stables par u et sur chacun de ces sev stables, la restriction de u est la somme d'une homothétie vectorielle et d'un endomorphisme nilpotent.*

Car ...

Traduction matricielle : s'il existe un polynôme scindé $P = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$ annulant u, alors il existe une base de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$

avec $A_k - \lambda_k I$ nilpotent d'indice inférieur ou égal à α_k

2.6 Quelques applications

2.6.1 Puissances de matrices ou d'endomorphismes

2.6.1.1 cas où A est diagonaliable

Alors $\exists D$ diagonale, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $D = P^{-1}AP$ et donc $A = PDP^{-1}$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et D^n est la matrice diagonale déduite de D en élevant à la puissance n tous les éléments diagonaux de D.
De plus, si A est inversible, i.e. $0 \notin Sp(A)$ alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

Exemple 2.6.1 $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$. *Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

2.6.1.2 Cas où A quelconque

Si on connaît un polynôme P annulateur de A, on peut diviser X^n par P : $X^n = QP + R_n$ avec $\deg(R_n) < \deg(P)$.
Alors $A^n = Q(A)P(A) + R_n(A) = R_n(A)$.
Ainsi, si $\deg(P) = r$, A^n peut s'écrire : $A^n = a_{n,0}I + a_{n,1}A + ... + a_{n,r-1}A^{r-1}$

Exemple 2.6.2 *Voir l'exemple*

2.6.2 Suites récurrentes linéaires

2.6.2.1 Généralités

Définition 2.6.3 *Une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre p à coefficients constants si et seulement si*

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{K} \text{ avec } \alpha_p \neq 0 \text{ tq } \forall n \geqslant p,\ u_n = \alpha_1 u_{n-1} + \alpha_2 u_{n-2} + ... + \alpha_p u_{n-p} \qquad (*)$$

Théorème 2.6.4 *L'ensemble des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $(*)$ avec $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{K}$ fixés et $\alpha_p \neq 0$, est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension p*

Car ...

2.6.2.2 Cas particulier des suites d'ordre 2

Soit α_1, α_2 des scalaires fixés avec $\alpha_2 \neq 0$.
Notons $H = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \forall n \geqslant 2,\ u_n = \alpha_1 u_{n-1} + \alpha_2 u_{n-2}\}$
Pour $u \in H$ notons $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. alors $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$
2. Cette matrice étant obtenue, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$.
   Le problème revient donc à calculer A^n, ce qu'on sait faire.
3. Déterminer χ_A.
4. Cas particulier où χ_A a deux racines distinctes r_1 et r_2. Que dire de U_n. Comparer avec le résultat démontré en Mpsi concernant la suite u_n.
5. Cas où χ_A a une racine double : refaire la même étude.
6. Comment cette méthode pourrait-elle être utilisée pour les suites récurrentes d'ordre 3 ou plus ?

Résumé trés succint :

1. Pour voir si u est diagonalisable :
   - Si χ_u n'est pas scindé, u n'est PAS diagonalisable
   - Sit χ_u est scindé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
     - Si χ_u est à racines simples, alors u diagonalisable
     - Si χ_u n'est pas à racines simples, il faut comparer, pour tout k, $\dim \mathrm{E}_{\lambda_k}(\mathrm{u})$ et $mul(\lambda_k)$. u est diagonalisable si pour tout k il y a égalité.
   - Si u annule un polynôme scindé à racines simples, alors u diagonalisable
   - autre ...
2. Concernant les polynômes annulateurs : P annulateur de u ssi $P(u) = 0$
   - χ_u est annulateur (Cayley Hamilton)
   - Le polynôme minimal Π_u est
     - annulateur
     - annulateur de degré minimal (et unitaire)
     - divise tout polynôme annulateur de u, et en particulier χ_u

Chapitre 3

Espaces vectoriels normés

Contents

3.1 Vocabulaire des evn

3.1.1 Norme

Dans toute la suite E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$..

Définition 3.1.1 *Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que*

1. *Positivité : i.e.* $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ *(voir ensemble d'arrivée de N)*
2. *Séparation :* $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$
3. *Homogénéité :* $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$
4. *Inégalité triangulaire :* $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$

Remarque 3.1.2 *Dans 3, si on prend $\lambda = 0$ alors on voit que $N(0_E) = 0$.*
Donc dans 2., la réciproque est toujours vraie : $x = 0 \Longrightarrow N(x) = 0$.

Proposition 3.1.3 $\forall x \in E,\ N(-x) = N(x)$

Clair

Exemple 3.1.4 *1. $E = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. alors la valeur absolue est une norme*
2. $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors le module est une norme

Exemple 3.1.5 *$E = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*
1. $N_2 : (x, y) \to \sqrt{x^2 + y^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ appelée norme euclidienne
2. $N\infty : (x, y) \to Max(|x|, |y|)$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$
3. $N_1 : (x, y) \to |x| + |y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$

Définition 3.1.6 *Un espace vectoriel normé (evn)est un couple (E, N) où E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et N une norme sur E.*

Définition 3.1.7 (E, N) *un evn et $x \in E$. x est dit unitaire (ou normé) si et seulement si $N(x) = 1$.*

Proposition 3.1.8 *Si $x \neq 0$ alors $\dfrac{x}{N(x)}$ est unitaire*

car ...

Proposition 3.1.9 ***Inégalités triangulaires***
1. $\forall x_1, ..., x_n \in E,\ N(x_1 + .. + x_n) \leqslant N(x_1) + ... + N(x_n)$
2. $\forall x, y \in E,\ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$

car ...

Remarque 3.1.10 *La seconde inégalité triangulaire s'écrit aussi :*
$\forall x, y \in E,\ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y) \leqslant N(x) + N(y)$

3.1.2 Distance associée à une norme

Définition 3.1.11 *Soit E un espace vectoriel. On appelle distance sur E toute application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que*

1. *positivité :* $\forall x, y \in E,\ d(x, y) \geqslant 0$ *(clair vu l'ensemble d'arrivée de d)*
2. *séparation :* $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$
3. *symétrie :* $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = d(y, x)$
4. *Inégalité triangulaire :* $\forall x, y, z \in E,\ d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$

Définition-propriété 3.1.12 *Soit (E, N) un evn. L'application $E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par $(x, y) \to N(x - y)$ est une distance sur E appelée distance associée à N.*

car ...

3.1.3 Boules

Définition 3.1.13 *Soit (E, N) un evn, $a \in E$ et $r > 0$*

1. *La boule ouverte de centre a et de rayon r est le sous-ensemble*
$$B_o(a, r) = \{x \in E / N(x - a) < r\}$$
2. *La boule fermée de centre a et de rayon r est le sous-ensemble*
$$B_f(a, r) = \{x \in E / N(x - a) \leqslant r\}$$
3. *La sphère de centre a et de rayon r est le sous-ensemble*
$$S(a, r) = \{x \in E / N(x - a) = r\}$$

Si $a = 0$ et $r = 1$ on parle alors de boule ouverte (ou sphère) unité.

Remarque 3.1.14 *La notation $B(a, r)$ sans précision sur le fait que c'est une boule fermée ou ouverte désigne usuellement la boule ouverte.*

Exemple 3.1.15 *Représenter dans la cas où $E = \mathbb{R}^2$ la boule ouverte unité dans les cas suivants (voir exemple 3.1.5)*

— *La norme est N_2*

— *La norme est N_∞*

— *La norme est N_1*

Exercice 3.1.16 *Notons ici $B_k(a,r)$ la boule ouverte pour la norme N_k, alors* $B_1(0,1) \subset B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1) \subset B_2(0,\sqrt{2})$

Exercice 3.1.17 *Soit $b \in B(a,r)$. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $B(b,\rho) \subset B(a,r)$*

3.1.4 Parties bornées de $\mathbb{R}$ (rappels)

Définition 3.1.18 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ On dira que A est majorée si et seulement si* $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \leqslant M$. *Le réel M est alors appelé majorant de A*
On dira que A est minorée si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \geqslant m$. Le réel m est alors appelé minorant de A
On dira que A est bornée si et seulement si A est à la fois majorée et minorée.

Remarque 3.1.19 *Dans le cas où A est majoré, le majorant de A n'est pas unique, car si M majore A, alors tout réel $M' > M$ est aussi majorant de A.*

Écrire cette remarque dans le cas où A est minoré.

Théorème 3.1.20 ***Parties bornées de*** $\mathbb{R}$
Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est bornée $\iff \exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ |a| \leqslant M$

car ...
Théorème important, qui permet de se ramener à des réels positifs plus facilement manipulables dans les inégalités.

Définition 3.1.21 ***Borne sup et borne inf***
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et M un réel.
On dira que M est borne sup de A, noté $M = sup(A)$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{c} M \text{ majore } A \\ \text{et} \\ \forall M' \in \mathbb{R},\ M' < M \Longrightarrow M' \text{ ne majore pas } A \end{array} \right.$$

On dira que m est borne inf de A, noté $m = inf(A)$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right.$$

(compléter)

Proposition 3.1.22 *Soit* $A \subset \mathbb{R}$. $M = sup(A) \iff \left\{ \begin{array}{c} \forall a \in A,\ a \leqslant M \\ et \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A, M - \varepsilon < a \end{array} \right.$

car ...

Théorème 3.1.23 ***Propriété fondamentale de*** $\mathbb{R}$**.**
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ *admet une borne sup.*
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ *admet une borne inf.*

3.1.5 Parties bornées d'un evn

Définition 3.1.24 *Soit* (E, N) *un evn et* $A \subset E$.

$$\begin{array}{rcl} \text{On dira que } A \text{ est bornée pour la norme } N & \iff & \exists M > 0,\ \forall a \in A, N(a) \leqslant M \\ & \iff & \exists M > 0,\ A \subset B_f(0, M) \end{array}$$

Proposition 3.1.25 (E, N) *un evn et* A *et* B *des parties de* E.

1. $A \subset B$ *et* B *bornée* $\Longrightarrow A$ *bornée (une partie d'un ensemble borné est bornée)*
2. *Une réunion finie de parties bornées est bornée*
3. *Une intersection quelconque de parties bornées est bornée*
4. *Les boules et les sphères sont bornées.*

car ...

Exemple 3.1.26 *Donner un exemple de famille infinie de parties bornées dont la réunion n'est pas bornée*

ATTENTION La notion de partie bornée dépend de la norme.

Exemple 3.1.27 *Prenons ici* $E = \mathbb{R}[X]$.
Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *on pose* $N(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ *et* $N'(P) = Max\{|a_k| / k \in \mathbb{N}\}$.

1. *Montrer que* N *et* N' *sont des normes sur* $\mathbb{R}[X]$
2. *Soit* B *la boule unité fermée pour la norme* N'. *Montrer que* B *n'est pas bornée pour la norme* N *(on pourra considérer les polynômes* $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$ *quand* n *décrit* $\mathbb{N}^*$*).*

Définition-théorème 3.1.28 *Soit* (E, N) *un evn et* A *une partie non vide et bornée de* E.
L'ensemble $\{N(x-y)/x, y \in A\}$ *admet une borne sup qui est appelée diamétre de* A *et notée* $diam(A)$.

$$diam(A) = Sup\{N(x-y)/x, y \in A\}$$

car ...

Exemple 3.1.29 *1. Ici* $E = \mathbb{R}$ *et* $A =]a, b[$. *Déterminer* $diam(A)$
2. $E = \mathbb{R}^2$ *muni de la norme* N_2. *Quel est la diamètre de la boule unité fermée ? et de la boule unité ouverte ?*

Exercice 3.1.30 *Soit* (E, N) *un evn. Montrer que* $diam(B(a, r)) = 2r$

Remarque 3.1.31 *$diam(A)$ n'est pas nécessairement atteint, i.e. rien ne dit qu'il existe a et b dans A tels que $diam(A) = N(a-b)$. Voir les exemples ci-dessus*

Définition 3.1.32 *Soit X un ensemble et $f : X \to E$.*

$$\text{On dit que } f \text{ est bornée sur } X \iff f(X) \text{ est une partie bornée de } E$$
$$\iff \exists M > 0, \forall x \in X,\ N(f(x)) \leqslant M$$

3.1.6 Fonctions lipschitziennes

Définition 3.1.33 *Soit (E, N) et (E', N') deux evn, A une partie de E et $f : A \to E'$. Soit enfin $k > 0$.*
*f est dite **lipschitzienne de rapport** k sur A $\iff \forall x, y \in A,\ N'(f(x) - f(y)) \leqslant kN(x-y)$*
*On dit aussi que f est $k-$**lipschitzienne***
*On dit que f est **lipschitzienne** $\iff \exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f est $k-$lipschitzienne*
*On dit que f est **contractante** $\iff \exists k$ tel que $0 < k < 1$ et f est $k-$lipschitzienne*

ATTENTION : $\forall x, y \in A$, tq $x \neq y, N'(f(x) - f(y)) < N(x-y)$ ne conduit pas à f contractante. Rien ne dit en effet qu'on va pouvoir trouver $k < 1$ tel que f est $k-$lipschizienne.

Exemple 3.1.34 *Sur $\mathbb{R}$ prenons $f : x \to \sqrt{x^2+1}$*
1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x-y|$
2. En considérant les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_n = n$ et $y_n = n+1$ montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists N,\ \forall n \geqslant N,\ |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant (1-\varepsilon)|x_n - y_n|$
3. Conclure que f n'est pas contractante.

Proposition 3.1.35 *Soit (E, N) et (E', N') deux evn, A une partie de E, $f : A \to E'$ et $g : A \to E'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*
f et g lipschitziennes $\Longrightarrow f + g$ lipschitzienne et λf lipschitzienne.
i.e. l'ensemble des fonctions lipschitziennes de A dans E' est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, E')$.

car ...

Proposition 3.1.36 *(E, N) un evn. Alors l'application N est 1 lipschitzienne*

car ...

Théorème 3.1.37 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ avec f dérivable sur I.*
f lipschitzienne sur I $\iff$ f' est bornée sur I.

car ...

3.1.7 Distance d'un point à une partie de E.

Définition 3.1.38 *Soit (E, N) un evn, A une partie non vide de E et $x \in E$.*
On définit la distance de x à A, notée $d(x, A)$ par :

$$d(x, A) = inf\{N(x-a)/a \in A\}$$

Cette borne inf existe car ...

Remarque 3.1.39 *Encore une fois, il s'agit d'une borne inf, pas d'un minium, i.e. rien ne dit qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, A)$ serait égal à $d(x, a)$*

Exemple 3.1.40 *Sur $\mathbb{R}$ avec $A =]0, 1[$. Alors $d(4, A) = 3$ mais $\forall a \in A, d(4, a) > 3$.*
De même $d(0, A) = 0$ mais pourtant $0 \notin A$.

Retenons donc

$$d(x, A) = 0 \not\Rightarrow x \in A$$

$$d(x, A) = r \not\Rightarrow \exists y \in A,\ d(x, y) = r$$

Théorème 3.1.41 *Soit $A \subset E$ et $x \in E$.*

1. $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *tq* $d(x, A) = \lim_n N(x - a_n)$
2. $d(x, A) = 0 \iff \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *tq* $\lim_n N(x - a_n) = 0$

car ...

Théorème 3.1.42 *Soit $A \subset E$ et $x \in E$.*
L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & d(x, A) \end{array} \right.$ *est 1 lipschitzienne*

car ...

3.1.8 Algèbres normées

Rappelez ce qu'est un algèbre sur le corps $\mathbb{K}$.

Définition 3.1.43 *Soit A une $\mathbb{K}-$algèbre et N une norme sur l'espace vectoriel A.*
On dit que N est une norme d'algèbre si et seulement si $\forall x, y \in A,\ N(xy) \leqslant N(x)N(y)$

Conséquence 3.1.44 *Si N est une norme d'algèbre, alors $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N},\ N(a^n) \leqslant N(a)^n$*

3.2 Exemples d'evn

3.2.1 evn de dimension finie

3.2.1.1 $E = \mathbb{R}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

On dispose de trois normes classiques

1. La norme 1, $N_1 : x = (x_1, ..., x_p) \to \sum_{k=1}^{p} |x_k|$. C'est bien une norme car ...
   $N_1(x)$ se note aussi $\|x\|_1$
2. La norme 2 ou norme euclidienne, $N_2 : x = (x_1, ..., x_p) \to \sqrt{\sum_{k=1}^{p} {x_k}^2}$. C'est bien une norme car ...
   $N_2(x)$ se note aussi $\|x\|_2$
3. La norme infinie, $N_\infty : x = (x_1, ..., x_p) \to max\{|x_k| / 1 \leqslant k \leqslant p\}$. C'est bien une norme car ...
   $N_\infty(x)$ se note aussi $\|x\|_\infty$

3.2.1.2 $E = \mathbb{C}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

On dispose là encore de trois normes classiques

1. La norme 1, $N_1 : z = (z_1, ..., z_p) \to \sum_{k=1}^{p} |z_k|$. C'est bien une norme car ...
   $N_1(z)$ se note aussi $\|z\|_1$
2. La norme 2, $N_2 : z = (z_1, ..., z_p) \to \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |z_k|^2}$. C'est bien une norme car ...
   $N_2(z)$ se note aussi $\|z\|_2$
3. La norme infinie, $N_\infty : z = (z_1, ..., z_p) \to max\{|z_k| / 1 \leqslant k \leqslant p\}$. C'est bien une norme car ...
   $N_\infty(z)$ se note aussi $\|z\|_\infty$

3.2.1.3 E espace vectoriel de dimension p

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Pour $x \in E$ notons $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$
On définit une fois encore les normes N_1, N_2, N_∞ associées à la base $\mathcal{B}$ en posant :

1. $N_1(x) = \sum_{k=1}^{p} |x_k|$. C'est bien une norme car ...
   $N_1(x)$ se note aussi $\|x\|_1$
2. $N_2(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2}$. C'est bien une norme car ...
   $N_2(x)$ se note aussi $\|x\|_2$
3. $N_\infty(x) max\{|x_k| / 1 \leqslant k \leqslant p\}$. C'est bien une norme car ...
   $N_\infty(x)$ se note aussi $\|x\|_\infty$

ATTENTION ces normes sur un espace vectoriel dépendent de la base. En fait, par exemple la norme N_1 associée à la base $\mathcal{B}$ devrait être notée $N_{1,\mathcal{B}}$ ... Mais s'il n'y a pas d'ambiguïté on se dispense de noter la base.

3.2.1.4 Projections canoniques

Définition 3.2.1 *L'application p_k définie par $p_k \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K} \\ (x_1, ..., x_n) & \to x_k \end{cases}$ est appelée kième projection canonique de $\mathbb{K}^n$ sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 3.2.2 *p_k est linéaire et $1-$lipschitzienne de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{K}, |.|)$*

car ...

3.2.2 $E = \mathbb{K}[X]$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. P se note aussi $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ en posant $\forall k \geqslant n+1,\ a_k = 0$.
Plus généralement tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant un nombre

fini de termes non nuls.
On définit quelques normes sur $\mathbb{K}[X]$:

1. $\|.\|_1$ par $\|P\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$; cette somme est finie, donc $\|P\|_1$ a bien un sens. $\|.\|_1$ est bien une norme car ...
2. $\|.\|_\infty$ par $\|P\|_\infty = max\{|a_k| /k \in \mathbb{N}\}$; ce maximum existe car il y a un nombre fini de a_k non nuls, donc $\|P\|_\infty$ a bien un sens. $\|.\|_\infty$ est bien une norme car ...
3. Soit a et b réels tels que $a < b$. $\|.\| : P \to \int_a^b |P(t)|\, dt$ est bien une norme sur $\mathbb{K}[X]$. Prouvez le
4. $\|.\| : P \to \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|P^{(k)}(0)\right|$. Justifiez que $\|P\|$ a bien un sens et montrer que $\|.\|$ est bien une norme.

3.2.3 Espace des fonctions bornées

Définition-théorème 3.2.3 *Soit X un ensemble non vide, et $(E, \|.\|)$ un evn. On note $\mathcal{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans E. Alors*
1. $\mathcal{B}(X,E)$ est un sev de $\mathcal{F}(X,E)$ et
2. L'application N_∞ : $\begin{cases} \mathcal{B}(X,E) & \to \mathbb{R} \\ f & \to \sup\{\|f(x)\| /x \in X\} \end{cases}$ est une norme, appelée norme de la convergence uniforme.

En effet ...

3.2.4 Espace des fonctions continues sur $[a, b]$ avec $a < b$

On sait que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.
On définit quelques normes usuelles sur cet espace :

1. Norme de la convergence en moyenne définie par $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt$
2. Norme de la convergence uniforme (ou norme infinie) définie par
$\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| /x \in [a,b]\}$.
3. Norme de la convergence quadratique définie par : $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, dt}$.

Ce sont bien des normes car ...

Exemple 3.2.4 *On prend $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et on considére*
$A = \{f_n \in E/$ *pour* $n \in [\![2,+\infty[\![, f_n$ *affine sur chacun des intervalles* $[0,1/n],[1/n,2/n],[2/n,1]$ *avec* $f_n(0) = 0, f_n(1/n) = \sqrt{n}, f_n(2/n) = 0, f_n(1) = 0\}$

1. *Tracer l'allure des courbes des fonctions f_n.*
2. *Déterminer $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|_1$*
3. *A est-il borné pour chacunes de ces deux normes ?*

3.2.5 Produit fini d'evn

Soit (E_k, N_k) une famille d'evn avec $1 \leqslant k \leqslant p$. Notons $E = E_1 \times ... \times E_p$
On définit trois normes sur cet espace vectoriel produit ainsi : pour $u = (u_1, .., u_p) \in E$,

1. La norme 1 : $\|(u_1, ..., u_p)\|_1 = \sum_{k=1}^{p} N_k(u_k)$
2. La norme 2 : $\|(u_1, ..., u_p)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} N_k(u_k)^2}$
3. La norme infinie : $\|(u_1, ..., u_p)\|_\infty = max\{N_k(u_k)/1 \leqslant k \leqslant p\}$

Ces trois applications sont bien des normes ...

3.2.6 Espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ notons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ Voici quelques exemples de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\|A\|_\infty = \text{Max}\{|a_{i,j}| /1 \leqslant i, j \leqslant n\}$
2. $\|A\|_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$
3. Vous avez vu en Mpsi que l'application $(A, B) \to tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire. On en déduit que $N : A \to \sqrt{tr({}^tA.A)}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, norme euclidienne

Ce sont effectivement des normes.

Reprenons la norme infinie.

Exercice 3.2.5 *1. Montrer que* $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \|AB\|_\infty \leqslant n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$
2. En déduire une constante C *telle que* $N = C \|.\|_\infty$ *est une norme d'algèbre sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3.3 Suites d'un evn

3.3.1 Suites

Définition 3.3.1 *Soit* E *un ensemble. Une suite de* E *est une application* $u : \begin{cases} \mathbb{N} & \to E \\ n & \to u(n) \end{cases}$
L'image $u(n)$ *se note souvent* u_n
La suite u *se note aussi* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ou, s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté* (u_n)
L'ensemble des suites de E *se note* $E^{\mathbb{N}}$

3.3.2 Convergence

Définition 3.3.2 *Soit* (u_n) *une suite de l'evn* $(E, \|.\|)$ *et soit* $\ell \in E$.
On dira que la suite (u_n) *converge vers* ℓ *pour la norme* $\|.\|$ *si et seulement si la suite réelle* $(\|u_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers 0, i.e.*

$$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in B_f(\ell, \varepsilon)$$

i.e. $\forall\varepsilon$, hors de la boule $B_f(\ell,\varepsilon)$ il y a un nombre fini de termes de la suite.

Remarque 3.3.3 *On peut écrire une inégalité stricte dans la définition :*

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ \|u_n-\ell\|<\varepsilon$$

car ...

Exemple 3.3.4 *1. La suite réelle (u_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=(1+1/n)^n$.*
Montrer que cette suite converge et donner sa limite.

2. *La suite complexe (u_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{e^{in\theta}}{n}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$*
   Montrer que cette suite converge et donner sa limite.
3. *La suite matricielle (A_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N},\ A_n=\begin{pmatrix}1+1/n & \cos(1/n)\\ \sin(n)/n & e^{n\sin(1/n)}\end{pmatrix}$.*
   Montrer que cette suite converge pour la norme $\|.\|_1$ et donner sa limite.
4. *dans $\mathcal{C}([0,1/2],\mathbb{R})$ on considère la suite (f_n) définie par $f_n : x\to x^n$.*
   Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge pour la norme infinie vers la fonction nulle.

3.3.3 Suites bornées

Définition 3.3.5 *Soit E un evn, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$*
La suite (u_n) est bornée pour la norme $\|.\|$ $\iff \exists M>0$ tq $\forall n\in\mathbb{N},\ \|u_n\|\leqslant M$
L'ensemble des suites bornées sur E se note $\ell^\infty(E)$ (la norme est supposée donnée).

Remarque 3.3.6 *Une suite n'est rien d'autre qu'une fonction définie sur $\mathbb{N}$. On retrouve ici la définition d'une fonction bornée donnée dans la définition 3.1.32*

Proposition 3.3.7 *$\ell^\infty(E)$ est un sev de $E^{\mathbb{N}}$.*
Pour $u\in\ell^\infty(E)$ on note $\|u\|_\infty=Sup\{\|u_n\|/n\in\mathbb{N}\}$. Alors $(\ell^\infty(E),\|.\|_\infty)$ est un evn.

Car ...

Exemple 3.3.8 *Plaçons nous dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$. La suite matricielle (A_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $A_n=\begin{pmatrix}\sin n & 1/n\\ (-1)^n & e^{-n}\end{pmatrix}$ est une suite bornée.*

Théorème 3.3.9 *Soit E un evn et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$.*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \implies (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}$$

Car ...

ATENTION La réciproque est fausse. Donner un contre-exemple

3.3.4 Opérations sur les suites convergentes

Théorème 3.3.10 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de l'evn E, et $\alpha,\ \beta\in\mathbb{K}$.*

$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ converge vers } \ell\\ (v_n) \text{ converge vers } \ell'\end{array}\right\} \implies (\alpha u_n+\beta v_n) \text{ converge vers } \alpha\ell+\beta\ell'$$

En d'autres termes, l'espace des suites convergentes est un sev de $\ell^\infty(E)$

Car ..

Théorème 3.3.11 ***"Produit" d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0***
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$$\left.\begin{array}{c}(u_n) \textit{ bornée} \\ (\alpha_n) \textit{ converge vers } 0\end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha_n u_n) \textit{converge vers } 0$$

$$\left.\begin{array}{c}(u_n) \textit{ converge vers } 0 \\ (\alpha_n) \textit{ bornée}\end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha_n u_n) \textit{converge vers } 0$$

Dans ce théorème, il s'agit du produit au sens multiplication externe d'un ev : la suite (u_n) est une suite vectorielle alors que la suite (α_n) est une suite scalaire. La multiplication a bien un sens.
Démonstration ...

Théorème 3.3.12 *Soit* $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$$\left.\begin{array}{c}(u_n) \textit{ converge vers } \ell \in E \\ (\alpha_n) \textit{ converge vers } \alpha \in \mathbb{K}\end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha_n u_n) \textit{converge vers } \alpha\ell$$

Se démontre en écrivant $\|\alpha_n u_n - \alpha\ell\| = \|\alpha_n u_n - \alpha u_n + \alpha u_n - \alpha\ell\|$. Terminer la démonstration ....

Exercice 3.3.13 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée.*
Soit (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathcal{A}$. Démontrer :

$$\left.\begin{array}{c}(u_n) \textit{ converge vers } \ell \in \mathcal{A} \\ (v_n) \textit{ converge vers } \ell' \in \mathcal{A}\end{array}\right\} \Longrightarrow (u_n v_n) \textit{converge vers } \ell\ell'$$

Théorème 3.3.14 ***Effet d'une application lipschitzienne sur une suite convergente.***
Soit E et F deux evn, $A \subset E$ et $f : A \to F$ application lipschitzienne, soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in A$.

$$(u_n) \textit{ converge vers } \ell \Longrightarrow \textit{la suite } (f(u_n)) \textit{ converge vers } f(\ell)$$

Car ...

3.3.5 Suites d'un evn produit

Théorème 3.3.15 *Soit $(E_k, N_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille d'evn, et $E = E_1 \times ... \times E_p$ l'espace produit muni de la norme infinie rattachée aux normes N_k.*
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $u_n = (u_{1,n} ..., u_{p,n})$ où pour tout k, $(u_{k,n})_{n \in \mathbb{N}} \in E_k^{\mathbb{N}}$.
Soit $\ell = (\ell_1, ..., \ell_p) \in E$.
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E vers ℓ pour $\|.\|_\infty \iff \forall k \in [\![1, p]\!]$, $(u_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k dans (E_k, N_k)

C'est dû à : $\forall k, \forall n,\ N_k(u_{k,n} - \ell_k) \leqslant \|u_n - \ell\|_\infty \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{p} N_j(u_{j,n} - \ell_j)$.

Faire la démonstration détaillée.

3.3.6 Normes différentes sur un même ev

ATTENTION Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. Soit N et N' deux normes sur E.

$$\begin{aligned}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \text{ pour } N &\not\Rightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \text{ pour } N' \\ &\not\Rightarrow \qquad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge pour } N'\end{aligned}$$

Et de même

$$\left.\begin{array}{r}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \text{ pour } N \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell' \text{ pour } N'\end{array}\right\} \not\Longrightarrow \ell = \ell'$$

Exemple 3.3.16 *On reprend l'exemple 3.2.4*
Montrer que la suite (f_n) converge pour la norme $\|.\|_1$, mais diverge pour la norme $\|.\|_\infty$.

3.4 Valeurs d'adhérence d'une suite

3.4.1 Suites extraites, sous-suites

Définition 3.4.1 *On appelle extractrice, tout application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.*

Exemple 3.4.2 *Parmi ces fonctions, donner les extractrices.*

1. $\varphi : n \to 2n+1$
2. $\varphi : n \to n^2$
3. $\varphi : n \to n-1$
4. $f : n \to (n-3)^2$

Proposition 3.4.3 *φ extractrice $\Longrightarrow \forall n,\ \varphi(n) \geqslant n$*

Récurrence à rédiger.

Définition 3.4.4 ***Suites extraites***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$
Une suite extraite (on dit aussi sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une extractrice.

Remarque 3.4.5 *Remarquons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite d'elle même.*

Dans ce cas, l'extractrice est la fonction identité.

Théorème 3.4.6 *Soit (E, N) un evn et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \iff \text{ toute suite extraite de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell$$

Quel est le sens évident ?
Démonstration de l'autre sens :

Conséquence 3.4.7 *Si on trouve deux extractrices ϕ et ψ telles que la sous-suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ et telle que la sous-suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ' avec $\ell \neq \ell'$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Exemple 3.4.8 *Montrer que la suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \cos(\frac{\pi}{2}n)$ *diverge.*

Théorème 3.4.9 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\iff$ *les sous-suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers la même limite*

Là encore, quel est le sens déjà prouvé ?
Démonstration de l'autre sens :

3.4.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass (version 1)

Théorème 3.4.10 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et* $\mathcal{B}$ *une base de* E*. On munit* E *de la norme infinie relative à la base* $\mathcal{B}$*.*
Pour cette norme, de toute suite bornée de E *on peut extraire une sous-suite qui converge*

En effet ....

3.4.3 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 3.4.11 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un evn,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E *et* $\ell \in E$
ℓ *est une valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si et seulement si il existe une suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* ℓ

Exemple 3.4.12 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{2n} = n \\ u_{2n+1} = 1 + \dfrac{1}{2n+1} \end{cases}$ *. Déterminer une valeur d'adhérence de cette suite.*

Exemple 3.4.13 *Un exemple très utile :*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$*.* 1 *et* -1 *sont des valeurs d'adhérence.*

Proposition 3.4.14 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell \Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a 1 et 1 seule valeur d'adhérence.*
Mais la réciproque est fausse : une suite ayant 1 et 1 seule valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente

Démonstration du théorème

Pour la réciproque, reprendre l'exemple 3.4.12, montrer alors que cette suite ne converge pas, et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Proposition 3.4.15 .
ℓ *est une valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall \varepsilon > 0,\ \forall N > 0,\ \exists n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$

car ...
Le théorème de Bolzano Weierstrass (version 1) s'énonce donc aussi sous la forme :

Théorème 3.4.16 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie,* $\mathcal{B}$ *une base de* E*,* E *normé par la norme infinie relativement à* $\mathcal{B}$*.*
Toute suite bornée de E *admet une valeur d'adhérence.*

3.5 Normes équivalentes

Posons le problème : on a vu que dans un evn, la convergence d'une suite est liée à la norme. On voudrait trouver une CNS sur les normes en sorte que la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ pour la norme N_1 soit équivalente à la convergence de ces suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ pour la norme N_2
Tout part de ce qui suit :

Proposition 3.5.1 *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2.*
$\exists\beta > 0$ *tel que* $N_2 \leqslant \beta N_1 \iff$ *(Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 pour N_1 converge vers 0 pour N_2).*

En effet 1) Rédigez le sens direct
Démonstration par l'absurde de la réciproque

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 3.5.2 *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2.*

$$\begin{gathered}\textit{On dira que } N_1 \textit{ est équivalente à } N_2 \\ \Updownarrow \\ \exists\alpha > 0,\ \exists\beta > 0 \textit{ tel que } \forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x) \\ \Updownarrow \\ \exists\alpha > 0,\ \exists\beta > 0 \textit{ tel que } \alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1\end{gathered}$$

Proposition 3.5.3 *Sur l'ensemble des normes définies sur E, la relation "N_1 est équivalente à N_2" est une relation d'équivalence.*

Ce qui est heureux dans le choix du vocabulaire ...
En effet :

Exemple 3.5.4 *Dans $\mathbb{R}^p$, montrer que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.*

Donc, des normes équivalentes existent.

Exercice 3.5.5 *Montrer que dans $\mathbb{C}^p$, les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes*

Théorème 3.5.6 *qui fait tout l'intérêt de cette définition*
Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 équivalentes.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée par* $N_1 \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée pour* N_2
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *pour* $N_1 \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *pour* N_2
- $A \subset E$, A *bornée pour* $N_1 \iff A$ *bornée pour* N_2

Car ...

Exemple 3.5.7 *En reprenant l'exemple 3.2.4 justifier que sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes.*

Théorème 3.5.8 *Dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes*

En fait, on va montrer que si $\mathcal{B}$ est une base de E, toutes les normes sont équivalentes à la norme infinie relativement à la base $\mathcal{B}$, et donc par transitivité, elles sont toutes équivalentes
En effet ...

Ce théorème est fondamental car il signifie que **si on est dans un espace de dimension finie,**
la notion de partie bornée est indépendante de la norme
la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme. Et donc on peut choisir la norme avec laquelle on va travailler
Les valeurs d'adhérence d'une suite ne dépendent pas de la norme
Dans un espace de dimension finie, on peut dire "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge" sans avoir besoin de préciser la norme !
Conséquence :

Théorème 3.5.9 ***Bolzano-Weierstrass (version complète)***
Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée a une valeur d'adhérence

on ne précise plus la base, ni la norme.

Mais **dans un espace vectoriel de dimension infinie** on ne peut pas se dispenser de parler de la norme avec laquelle on travaille. Or des espaces de dimension infinie on en manipule beaucoup : par exemple l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$, ou $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ou ...

Théorème 3.5.10 ***Comment prouver que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes ?*** *Bien entendu l'espace vectoriel doit être de dimension infinie ...*

— *S'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ et $\lim \dfrac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} = +\infty$ alors N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes*
— *S'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ et $\lim \dfrac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} = 0$ alors N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes*

Car ...

Dans la pratique, il faudra essayer d'exhiber de telles suites ....

Chapitre 4

Séries d'éléments d'un evn

Contents

4.1 Suites et séries

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel de dimension finie.

4.1.1 Définitions et généralités

Définition 4.1.1 — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.*

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. S_n est appelé $n^{ième}$ somme partielle de la série.
Etudier la série de terme général u_n c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour parler de la série de terme général u_n on note cette série $\sum u_n$.

- *On dit que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E, et dans ce cas uniquement, la limite de cette suite est appelée somme de la série $\sum u_n$ et se note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$*
- *On dira que la série $\sum u_n$ diverge lorsqu'elle ne converge pas.*
- *On dira que deux séries sont de même nature si et seulement si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.*

Proposition 4.1.2 *Il y a bijection entre l'ensemble des suites de E et l'ensemble des séries définies sur E, c'est à dire qu'à toute suite de E on associe 1 et 1 seule série, et toute série de E est associée à 1 et 1 seule suite de E.*

On vient de voir qu'à partir d'une suite de E on définit 1 et 1 seule série.
Pour la réciproque, il suffit de voir que pour $n \geqslant 1$, $S_n - S_{n-1} = u_n$ et $u_0 = S_0$, ce qui permet de retrouver la suite si on connaît la série, c'est à dire la suite des sommes partielles.

Proposition 4.1.3 *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Les séries $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ sont de même nature, et si elles convergent alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$*

car ...

Théorème 4.1.4 *La série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$*

En effet : $\frac{1}{n} \geqslant \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln(n)$. Alors, par télescopage, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \geqslant \ln(n+1)$, et donc, $\lim S_n = +\infty$

Théorème 4.1.5 ***Condition NÉCESSAIRE de convergence d'une série :***

$$\sum u_n \text{ converge } \Longrightarrow \lim u_n = 0$$

Car Soit $S = \lim S_n = \sum_{0}^{+\infty} u_n$. Or pour $n \geqslant 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ donc $\lim u_n = 0$.

Conséquence 4.1.6 *Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. On dit, dans ce cas qu'elle diverge grossièrement.*

Exemple 4.1.7 $\sum (-1)^n$ *diverge* ***grossièrement***.

Remarque 4.1.8 *Le théorème est bien une condition nécessaire mais pas suffisante ; comme contre exemple il suffit de considérer la série harmonique : si $u_n = \frac{1}{n}$, alors $\lim u_n = 0$ et pourtant $\sum u_n$ diverge.*

Définition 4.1.9 ***Reste d'ordre n d'une série convergente***
Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors vu 4.1.3, pour tout entier n fixé, $\sum_{k \geqslant n+1} u_k$ converge. Cette somme est appelée Reste d'ordre n de la série $\sum u_k$, et se note souvent R_n i.e.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition 4.1.10 *Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $\lim R_n = 0$*

car ...

4.1.2 Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes

Théorème 4.1.11 *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries convergentes. Alors* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\sum(u_n + \lambda v_n)$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

clair ...

Conséquence 4.1.12 *Notons (ici)* $S(E)$ *l'ensemble des suites de* E *dont la série associée converge. Alors* $S(E)$ *est un sev de* $E^{\mathbb{N}}$ *et l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} S(E) & \to & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \to & \displaystyle\sum_0^{+\infty} u_n \end{array}\right.$ *est linéaire*

ATTENTION : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne sait rien de $\sum(u_n + v_n)$

Exercice 4.1.13 *On suppose que* $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge. Que dire de* $\sum(u_n + v_n)$ *?*

Lorsque E est de dimension finie (ce qui est le cas dans ce chapitre) on sait que la convergence d'une suite peut se prouver en travaillant sur les coordonnées dans une base, ce qui se traduit ici par :

Théorème 4.1.14 $\dim \mathrm{E} = \mathrm{p}$ *et* $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ *une base de* E.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_{i,n} e_i$ *avec* $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *Alors*
$\sum u_n$ *converge* $\iff \forall i \in [\![1, p]\!]$, $\displaystyle\sum_n u_{i,n}$ *converge, et dans ce cas*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{i,n}\right) e_i$$

Conséquence 4.1.15 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \left\{\begin{array}{l} \sum Re(u_n) \text{ converge} \\ \sum Im(u_n) \text{ converge} \end{array}\right. \iff \sum \overline{u_n} \text{ converge}$$

4.1.3 Série géométrique dans $\mathbb{C}$

Théorème 4.1.16 *Soit* $a \in \mathbb{C}$.
La série $\displaystyle\sum_n a^n$ *converge dans* $\mathbb{C} \iff |a| < 1$, *et dans ce cas*, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

car ...

4.1.4 Série télescopique associée à une suite

Définition-propriété 4.1.17 *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.
On appelle série télescopique associée à cette suite, la série de terme général $u_n = v_n - v_{n-1}$ *définie pour* $n \geqslant 1$.
Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et la série* $\sum u_n$ *sont de même nature, et*
si elles convergent, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0$

clair, mais important.

4.2 Séries de nombres réels positifs

4.2.1 Théorème fondamental

Théorème 4.2.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels* ***positifs***. *La série* $\sum u_n$ *converge si et seulement si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des sommes partielles est majorée, i.e.*
$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M$

En effet, la suite (S_n) est croissante et donc ...

Remarque 4.2.2 *Sous les mêmes hypothèses,* $\sum u_n$ *diverge* $\iff \lim_n S_n = +\infty$

Attention, cette remarque n'a de sens que pour les suites à termes positifs. Par exemple, la série $\sum(-1)^n$ diverge, mais pour autant la suite ne tend pas vers $+\infty$.

4.2.2 Comparaison des séries à temes réels positifs

: majoration, domination, équivalence.

Théorème 4.2.3 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à termes réels* ***positifs*** *telles que* $\forall n,\ u_n \leqslant v_n$. *Alors*
— $\sum v_n$ *converge* $\Longrightarrow \sum u_n$ *converge*
— $\sum u_n$ *diverge* $\Longrightarrow \sum v_n$ *diverge.*

clair en travaillant sur les sommes partielles

Exemple 4.2.4 *On sait que pour* $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. *En utilisant le théorème 4.1.4 que peut-on conclure ?*

Théorème 4.2.5 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à termes réels* ***positifs*** *telles que* $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. *Alors*
— $\sum v_n$ *converge* $\Longrightarrow \sum u_n$ *converge*
— $\sum u_n$ *diverge* $\Longrightarrow \sum v_n$ *diverge.*

Se déduit du théorème précèdent et de la définition de $u_n = \mathcal{O}(v_n)$

Théorème 4.2.6 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels positifs, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

car ...

Exemple 4.2.7 1. *Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$. Conclure sur la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$*

2. *Nature de la série $\sum(\sqrt{n^4+1} - n^2)$*

3. *Nature de la série $\sum n^{-\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})}$*

4.2.3 Comparaison avec une série géométrique

Théorème 4.2.8 ***Comparaison logarithmique.***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels strictement positifs telles que $\forall n,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Alors $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.

Car, montrer que $\forall n,\ u_n = u_0 \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ et en déduire que $u_n \leqslant \dfrac{u_0}{v_0} v_n$, puis conclure ...

Théorème 4.2.9 *Si $\forall n,\ u_n > 0$ et si $\exists a > 0,\ b > 0$ tels que $\forall n,\ a \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant b$ alors :*
- *$b < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ converge*
- *$a \geqslant 1 \Longrightarrow \sum u_n$ diverge.*

Travailler avec $v_n = b^n$ et $w_n = a^n$

Théorème 4.2.10 ***Règle de D'Alembert***
Si $\forall n,\ u_n > 0$ et si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors
- *$\ell < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ converge*
- *$\ell > 1 \Longrightarrow \sum u_n$ diverge*
- *Dans le cas où $\ell = 1$, le théorème de permet pas de conclure*

car ...

Remarque 4.2.11 *Si $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$ alors $\sum u_n$ diverge*

car alors la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang, et donc ne converge pas vers 0, ce qui prouve que la série diverge grossièrement.

Exemple 4.2.12 *Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$*

Exemple 4.2.13 *Discuter selon la valeur du réel $x > 0$ la nature de la série $\sum n^2 x^n$*

Théorème 4.2.14
- *Si $\exists q \in]0,1[$ tel que $\lim_n q^n u_n = \ell > 0$ alors $\sum u_n$ diverge*
- *Si $\exists q > 1$ tel que $\lim_n q^n u_n = \ell \geqslant 0$ alors $\sum u_n$ converge*

Car (raisonner sur des équivalents).

4.2.4 Comparaison à une intégrale impropre

4.2.4.1 Fonctions positives intégrales sur $\mathbb{R}_+$

Définition 4.2.15 *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et **positive**.*
On dira que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $F : x \to \int_0^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
Dans ce cas, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt$ se note $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ ou $\int_0^{+\infty} f$.
*Plus généralement, pour a réel et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et **positive**.*
On dira que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $F : x \to \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Exemple 4.2.16 *Parmi les fonctions suivantes dire lesquelles sont intégrables sur l'intervalle donné*

1. $f : x \to x^2$ *sur* $[0, +\infty[$; $g : x \to \dfrac{1}{x^2}$ *sur* $[1, +\infty[$
2. $f : x \to x^{-\alpha}$ *sur* $[1, +\infty[$ *(discuter selon α)*
3. $f : x \to e^{-x}$ *sur* $\mathbb{R}_+$

Remarque 4.2.17 *On reviendra plus à fond sur la notion de fonction intégrable sur un intervalle, il s'agit ici d'une première approche utile pour l'étude des séries à termes positifs.*

Proposition 4.2.18 *$f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et **positive**.*
f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = +\infty$

car ....

4.2.4.2 Comparaison série-intégrale

Théorème 4.2.19 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, **positive et décroissante**.*
On note $u_n = f(n)$. Alors

1. *f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ $\iff \sum f(n)$ converge $\iff \sum u_n$ converge*
2. $\displaystyle\int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant S_n \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)dt$
3. *Si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$,* $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt$
4. *La série* $\displaystyle\sum \left(\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)\right)$ *converge*

car ...

Remarque 4.2.20 *Ce qui importe dans l'item 1 de ce théorème c'est la convergence de $x \to \int_a^x f(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$. Donc, il n'est pas nécessaire que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}_+$: la continuité sur $[a, +\infty[$ est suffisante. Dans ce cas, il faut adapter la démonstration de l'item 2 du théorème pour obtenir une double inégalité du même type.*

4.2.4.3 Séries de Riemann

Définition 4.2.21 *On appelle série de Riemann toute série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ *avec* α *réel fixé (ne dépend pas de* n*)*

Théorème 4.2.22 *La série* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge* $\iff \alpha > 1$

En effet ...

Exemple 4.2.23 *On retrouve ainsi les résultats vus dans l'exemple 4.2.7 et dans le théorème 4.1.4 (série harmonique)*

Exemple 4.2.24 *Etudier la nature des séries suivantes :* $\sum u_n$ *où*

1. $u_n = \sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha}$ *(discuter selon* α*) ;*
2. $u_n = |cos(1/n) - exp(-1/n)|$
3. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

4.2.5 Comparaison à une série de Riemann

Théorème 4.2.25 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes positifs.*

- *si* $\exists\alpha > 1$ *tel que la suite* $(n^\alpha u_n)_n$ *est bornée, alors* $\sum u_n$ *converge*
- *si* $\exists\alpha \leqslant 1$ *tel que la suite* $(n^\alpha u_n)_n$ *a une limite non nulle (éventuellement infinie), alors* $\sum u_n$ *diverge*

car ...

Si $\exists\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ converge, alors cette suite est bornée et donc la théorème est applicable d'où la propriété :

Proposition 4.2.26 *Si* $\exists\alpha > 1$ *tel que la suite* $(n^\alpha u_n)$ *converge, alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

Exemple 4.2.27

- *Étude de la convergence de* $\sum u_n$ *où* $u_n = \dfrac{n^n}{2^{n^2}}$
- *Étude de la convergence de* $\sum u_n$ *où* $u_n = \left(1 - \dfrac{\ln n}{n}\right)^n$

Exercice 4.2.28 *Les séries de Bertrand sont les séries* $\sum u_n$ *où* $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *pour* $n \geqslant 2$. *Discuter selon les valeurs de* α *et de* β *la nature des séries de Bertrand*

4.2.6 Étude des restes d'ordre n des séries positives convergentes

Théorème 4.2.29 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites positives, avec* $u_n \sim v_n$
On suppose que $\sum v_n$ *converge (et donc* $\sum u_n$ *converge aussi).*
Alors $R_n \sim R'_n$ *où* $R_n = \sum_{n+1}^{+\infty} u_k$ *et* $R'_n = \sum_{n+1}^{+\infty} v_k$*, c'est à dire les restes d'ordre* n *sont équivalents.*

car ...

Remarque 4.2.30 *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $\sum v_n$ *converge, alors* $R_n = o(R'_n)$.
$u_n = \mathcal{O}(v_n)$ *et* $\sum v_n$ *converge, alors* $R_n = \mathcal{O}(R'_n)$.

Exemple 4.2.31 *Donner un équivalent de* $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *(on pourra utiliser l'exemple 4.2.7)*

4.2.7 Étude des sommes partielles des séries positives divergentes

Théorème 4.2.32 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites positives, avec* $u_n \sim v_n$
On suppose que $\sum v_n$ *diverge (et donc* $\sum u_n$ *diverge aussi).*
Alors $S_n \sim S'_n$ *où* $S_n = \sum_0^n u_k$ *et* $S'_n = \sum_0^n v_k$, *c'est à dire les sommes partielles de même rang sont équivalentes*

car ...

Exemple 4.2.33 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle ayant une limite :* $\lim_n u_n = \ell \in \mathbb{R}$
Montrons qu'alors $\lim_n \frac{u_1 + ... + u_n}{n} = \ell$

Cet exemple est connu sous le nom de théorème de Césaro (hors programme)

4.2.8 Formule de Stirling

Théorème 4.2.34

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Démonstration hors programme

4.3 Séries réelles alternées

4.3.1 Définition

Définition 4.3.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes réels.*
On dira que la suite est alternée si et seulement si
$(\forall n,\ u_n = (-1)^n |u_n|)$ *ou* $(\forall n,\ u_n = (-1)^{n+1} |u_n|)$.

Exemple 4.3.2

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad , \quad v_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n}) \quad , \quad w_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$$

Ces suites sont-elles alternées ?

Définition 4.3.3 *On dira que la série* $\sum u_n$ *est une série alternée si et seulement si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est alternée.*

4.3.2 Théorème des séries alternées (TSA)

Théorème 4.3.4 *Toute série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0 est une série convergente, i.e.*

$$\left.\begin{array}{c}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite alternée}\\ (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite décroissante}\\ \lim\limits_n u_n = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

et

— $\forall n,\ S_n$ *et* S_{n+1} *encadrent* $S = \sum\limits_0^\infty u_k$
— $\forall n,\ |R_n| = |S - S_n| \leqslant |u_{n+1}|$
— $\forall n,\ R_n$ *a le même signe que* u_{n+1} *(premier terme négligé lorsqu'on approche* S *par* S_n*)*

car ...

Exemple 4.3.5 *Séries de Riemann alternées : ce sont les séries* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Montrer que ces séries convergent si et seulement si* $\alpha > 0$.
Ces séries, pour $0 < \alpha \leqslant 1$ *constituent d'excellents exemples de suites dont la série converge, mais dont la série des valeurs absolues diverge*

Remarque 4.3.6 *Ici les séries sont à termes réels. Les théorèmes de comparaison, par exemple sur les équivalents sont faux sur les séries à termes à signes non constants. Par exemple :*

Exemple 4.3.7 *Soit* $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ *et soit* $v_n = u_n + \frac{1}{n \ln n}$

1. *Montrer que* $\sum u_n$ *converge (cette série est appelée série harmonique alternée)*
2. *Montrer que* $u_n \sim v_n$
3. *Montrer que* $\sum (v_n - u_n)$ *diverge et en déduire la nature de* $\sum v_n$.

Exercice 4.3.8

1. *Nature de la série* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$
2. *Discuter selon la valeur de* α *la nature des séries* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$
3. *nature de la série* $\sum \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$

4.4 Séries d'éléments d'un evn de dimension finie

E un evn de dimension finie.Toutes les normes étant équivalentes, on ne précise pas la norme utilisée.

4.4.1 Convergence absolue

Définition 4.4.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.
On dira que la série $\sum u_n$ *est absolument convergente si et seulement si la série positive* $\sum \|u_n\|$ *converge*

On s'est ainsi ramené aux séries à termes dans $\mathbb{R}_+$.

Cas particulier 4.4.2 *Dans le cas où* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *ou* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,
$\sum u_n$ *converge absolument* $\iff \sum |u_n|$ *converge.*

Exemple 4.4.3
1. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ *converge absolument*
2. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ *ne converge pas absolument*

4.4.2 Convergence absolue $\Longrightarrow$ convergence

Théorème 4.4.4 ***Cas des séries numériques*** *: Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
$\sum u_n$ *converge absolument* $\Longrightarrow \sum u_n$ *converge et dans ce cas,*

$$\left|\sum_0^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_0^{+\infty} |u_n|$$

car ...

ATTENTION : la réciproque est fausse comme le montre la série harmonique alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Théorème 4.4.5 ***Cas général d'un evn de dimension finie*** *: soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.
$\sum u_n$ *converge absolument* $\Longrightarrow \sum u_n$ *converge et dans ce cas,*

$$\left\|\sum_0^{+\infty} u_n\right\| \leqslant \sum_0^{+\infty} \|u_n\|$$

car ...

4.4.3 Séries géométriques

Théorème 4.4.6 *Soit* $\mathcal{A}$ *une algèbre normée de dimension finie, ayant pour unité* e.
Soit $u \in \mathcal{A}$ *tel que* $\|u\| < 1$.
Alors $\sum u^n$ *converge absolument (donc converge) et*
$e - u$ *est inversible dans* $\mathcal{A}$, *avec* $(e-u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$

Rappeler la définition d'une algèbre normée ...
Comparer alors $\|u^n\|$ avec $\|u\|^n$. Conclure sur la convergence absolue de $\sum u^n$.
Montrons alors que $e - u$ inversible et ...

Cas particulier 4.4.7 *Dans le cas où $E = \mathbb{C}$ algèbre normée, on retrouve le fait que $|z| < 1 \Longrightarrow \sum_{0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$*

Remarque 4.4.8 *Si N est une norme d'espace vectoriel sur $\mathcal{A}$, et $\|.\|$ une norme d'algèbre, on peut avoir $N(a) > 1$ avec pourtant $\sum a^n$ converge.*
Par exemple : prenons $N = 3\|.\|$. N est clairement une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}$. Soit alors $a \in \mathcal{A}$ tel que $N(a) = 2$, alors $\|a\| = 2/3 < 1$, donc $\sum \|a\|^n$ converge, vu le théorème, et donc $\sum a^n$ converge pour $\|.\|$ (CVA $\Longrightarrow$CV) et donc, les normes étant équivalentes, $\sum a^n$ converge pour N.

4.4.4 Série exponentielle

Théorème 4.4.9 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie, ayant pour unité e et soit $u \in \mathcal{A}$.*
La série $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente, et sa somme est notée $exp(u)$.

$$exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$$

Car, par application de D'Alembert, $\sum \frac{\|u\|^n}{n!}$ converge.

Remarque 4.4.10

— *Si $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, on obtient pour x réel, $exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. On admettra pour l'instant qu'il s'agit bien de l'exponentielle rencontrée en terminale et en Mpsi.*

— *Si $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, on obtient pour z complexe, $exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. On admettra pour l'instant qu'il s'agit bien de l'exponentielle complexe rencontrée en Mpsi :*
$exp(z) = e^{Re(z)}(\cos(Imz) + i\sin(Imz))$.

— *Si $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on obtient pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ qui nécessite de connaître les puissances successives de A. On peut se ramener utilement au chapitre sur la réduction des matrices ...*
Exemple 4.4.11 *Pour $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer $exp(A)$*

4.4.5 Espace vectoriel des séries absolument convergentes

Définition 4.4.12 *On note $\ell^1(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum |u_n|$ converge (i.e. la série $\sum u_n$ converge absolument dans $\mathbb{K}$).*

Théorème 4.4.13 *$\ell^1(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé par la norme N_1 définie par*

$$N_1 : \begin{cases} \ell^1(\mathbb{K}) & \to \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \to \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \end{cases}$$

En effet ...

Définition 4.4.14 ***Généralisation***
Soit E un evn de dimension finie. On note $\ell^1(E)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum \|u_n\|$ converge (i.e. la série $\sum u_n$ converge absolument dans E).

Théorème 4.4.15 *$\ell^1(E)$ est un espace vectoriel normé par la norme N_1 définie par*

$$N_1 : \begin{cases} \ell^1(E) & \to \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| \end{cases}$$

Démonstration très voisine de celle du théorème précédent. À faire.

Chapitre 5

Convexité

Contents

5.1 Parties convexes d'un espace vectoriel réel

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel réel.

5.2 Barycentre

Définition 5.2.1 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ *tq* $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \neq 0$, *et* $(a_1, ..., a_n) \in E^n$.

On appelle barycentre du n-uplet $(a_k, \lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *le point* $g \in E$ *défini par :* $g = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$,

i.e. le point g *tel que* $(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k) g = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k a_k)$

Remarque 5.2.2 *1. g est ce barycentre si et seulement si* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k - g) = 0$, *ce qui s'écrit, en utilisant la notation affine :* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0}$

2. *On ne change pas le barycentre en multipliant tous les coefficients* λ_k *par un même scalaire non nul (propriété appelé homogénéité). En particulier on peut se ramener au cas où* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Proposition 5.2.3 ***Associativité***

Soit g *le barycentre de* $(a_1, \lambda_1), ..., (a_n, \lambda_n)$ *(on suppose bien entendu que* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \neq 0$*)*
Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$ *tq* $\lambda_1 + ... + \lambda_p \neq 0$ *et* $\lambda_{p+1} + ... + \lambda_n \neq 0$.
On note g_1 *le barycentre de* $(a_1, \lambda_1), ..., (a_p, \lambda_p)$ *et* g_2 *le barycentre de* $(a_{p+1}, \lambda_{p+1}), ..., (a_n, \lambda_n)$.
Alors g *est le barycentre de* $(g_1, \lambda_1 + ... + \lambda_p)$ *et de* $(g_2, \lambda_{p+1} + ... + \lambda_n)$

En effet ...

Cas particulier 5.2.4 ***: centre de gravité***
Si $\forall k,\ \lambda_k = 1$, *alors le barycentre de* $(a_1, 1), ..., (a_p, 1)$ *est appelé centre de gravité de* $a_1, ..., a_p$, *ou centre de masse, ou isobarycentre. C'est aussi le barycentre des* a_k *affectés tous de la même masse* λ *non nulle.*

Exemple 5.2.5 *Dans le plan affine, l'isobarycentre de deux points* A *et* B *est le milieu du segment* $[A, B]$

Exemple 5.2.6 *Dans le plan affine, soit* A, B, C *trois points non alignés. Montrer que le centre de gravité du triangle* ABC *est sur la médiane issue de* A, *i.e. la droite issue de* A *et passant par le milieu de* $[B, C]$.
Montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

5.2.1 Segments de E

Définition 5.2.7 *Soient* a *et* b *dans* E. *On appelle segment d'extrémités* a *et* b, *noté* $[a, b]$ *ou* $[b, a]$, *l'ensemble des barycentres de* $(a, t), (b, 1-t)$ *lorsque* t *décrit* $[0, 1]$
$[a, b] = \{ta + (1-t)b / t \in [0, 1]\} = \{\alpha a + (1-\alpha)b / \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta \neq 0\}$

Remarque 5.2.8
1. *Dans le cas où* $E = \mathbb{R}$, *on distingue* $[a, b]$ *de* $[b, a]$, *car* $\mathbb{R}$ *est ordonné. Dans ce cas, la notation* $[a, b]$ *suppose (sauf mention du contraire) que* $a \leqslant b$.
   Lorsque E *n'est pas* $\mathbb{R}$, $[a, b]$ *et* $[b, a]$ *désignent le même segment.*
2. $[a, a] = \{a\}$.
3. $[a, b]$ *est aussi l'ensemble des barycentres de* $(a, 1-t), (b, t)$ *lorsque* t *décrit* $[0, 1]$.

Proposition 5.2.9 .
$[a, b]$ *est l'ensemble des barycentres de* $(a, \alpha), (b, \beta)$ *lorsque* $\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta \neq 0$

car ...

Exemple 5.2.10
1. *Prenons* $E = \mathbb{R}[X]$. *Le segment* $[X, X^2]$ *est l'ensemble* $\{P \in \mathbb{R}[X] / \exists t \in [0, 1]$ *tq* $P = tX + (1-t)X^2\}$.
   Par exemple $\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}X^2 \in [X, X^2]$.
2. $f = \frac{2}{5}\sin + \frac{3}{5}\cos \in [\sin, \cos]$ *dans* $\mathcal{C}(\mathbb{R})$
3. *On peut aussi parler d'un segment de matrices, ou d'un segment d'endomorphismes ...*

5.2.2 Convexité

Définition 5.2.11 *Soit $\Gamma \subset E$. On dit que Γ est convexe si et seulement si, $\forall a, b \in \Gamma,\ [a, b] \subset \Gamma$, i.e. $\forall a, b \in \Gamma,\ \forall t \in [0, 1],\ ta + (1 - t)b \in \Gamma$.*

Proposition 5.2.12 *Une intersection non vide de convexes est convexe.*

Clair ...

Proposition 5.2.13 *Un segment de E est un convexe de E.*

car ...

Proposition 5.2.14 *Une boule (ouverte ou fermée) est convexe*

car ...

Théorème 5.2.15 *Soit $\Gamma \subset E$.*
Γ est convexe $\iff$ tout barycentre de points de Γ affectés de masses positives est un point de Γ

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (a_1, ..., a_n) \in \Gamma^n,\ \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n, \\ \lambda_1 + ... + \lambda_n \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in \Gamma \end{array} \right.$$

car : $\Leftarrow$) est clair : il suffit de prendre $n = 2$ et on retrouve la définition de Γ convexe.
$\Rightarrow$) : par récurrence sur n. ...

5.3 Fonctions convexes d'une variable réelle

5.3.1 Généralités

Définition 5.3.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*
On dira que f est convexe sur I

$$\iff \forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1],\ f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leqslant (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$
$$\iff \forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1],\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Exemple 5.3.2 *Toute application linéaire de I dans $\mathbb{R}$ ($f : x \to \alpha x$) est convexe (car il y a égalité, donc inégalité large)*

Exemple 5.3.3 *Si on sait que f est convexe sur I, alors $\forall x, y \in I,\ f\left(\dfrac{x + y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$*

Proposition 5.3.4 *f est convexe sur I si et seulement si tout arc est sous sa corde*

Figure :

5.3.2 Caractérisation par l'épigraphe

Définition 5.3.5 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*
On appelle épigraphe de f l'ensemble $\mathcal{E}(f) = \{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I$ et $y \geqslant f(x)\}$
(C'est la partie du plan $\mathbb{R}^2$ située "au dessus" de la courbe)

Figure :

Théorème 5.3.6 *f est convexe $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$, i.e. $\forall a, b \in \mathcal{E}(f),\ [a, b] \subset \mathcal{E}(f)$*

car ...

C'est un critère géométrique très pratique : par exemple, la fonction cos n'est pas convexe sur $[0, \pi]$, $x \to x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, $x \to x^3$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$ mais est convexe sur $\mathbb{R}_+$

5.3.3 Caractérisation par l'inégalité des pentes

Théorème 5.3.7 *f est convexe sur I $\Longleftrightarrow$*
$\forall a, b, c \in I,\ a < b < c \Longrightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \dfrac{f(c) - f(b)}{c - b}$

Faire une figure pour comprendre comment mémoriser ces inégalités.

Démonstration : ...

5.3.4 Inégalités de convexité

Théorème 5.3.8 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

$$f \text{ convexe sur } I \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, ..., x_n) \in I^n,\ \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Longrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Remarquons tout d'abord que I est un intervalle et donc convexe, et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I$.

Alors en effet ...

Exemple 5.3.9 1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ \left(\dfrac{a + b + c}{3}\right)^2 \leqslant \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$ *car ...*

2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ e^{\frac{2a+b+c}{4}} \leqslant \dfrac{1}{2} e^a + \dfrac{e^b + e^c}{4}$ *car ...*

5.4 Fonctions concaves d'une variable réelle

Définition 5.4.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*
On dira que f est concave sur $I \iff -f$ est convexe sur I

Conséquence 5.4.2 1. *f concave sur $I \iff$*
$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
i.e. tout arc est au dessus de sa corde.

2. *La partie située sous la courbe est convexe.*
3. *Inégalités des pentes : écrivez les ...*

4. *Inégalités de convexité :*

Exemple 5.4.3 *Exemples de fonctions concaves :*
- $x \to \sqrt{x}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.
- $x \to \ln x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$
- $x \to x^3$ *sur (compléter)*

5.5 Fonctions convexes dérivables ou deux fois dérivables sur I

Théorème 5.5.1 *Soit f dérivable sur I et (Γ) sa courbe représentative dans $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$*

$$\begin{aligned} f \text{ convexe sur } I &\iff \text{la dérivée de } f \text{ est croissante sur } I \\ &\iff \text{La courbe est toujours au dessus de ses tangentes} \end{aligned}$$

En effet :

Conséquence 5.5.2 *Soit f deux fois dérivable sur I*
- *f est convexe sur $I \iff f'' \geqslant 0$ sur I*
- *f concave sur $I \iff f'' \leqslant 0$ sur I*

Exemple 5.5.3 1. *exp est convexe sur $\mathbb{R}$.*
2. *$\forall n \in \mathbb{N},\ x \to x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$.*
3. *$x \to \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.*
4. *$x \to \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $\mathbb{R}_+$ car ...*

Application 5.5.4 1. $\forall x \in [0,\pi],\ \sin x \leqslant x$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$
3. *On sait que $\ln$ est concave sur $]0,+\infty[$. En utilisant la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1, en déduire une inégalité.*

5.6 Régularité des fonctions convexes

Remarque 5.6.1 *f convexe sur $I \not\Longrightarrow f$ continue sur I*

Donner un exemple d'une fonction convexe mais non continue sur $[a, b]$

Remarque 5.6.2 *f convexe sur $]a, b[\not\Longrightarrow f$ dérivable sur $]a, b[$*

Donner un exemple d'une telle fonction.

Exercice 5.6.3 *Soit f convexe sur I et soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Alors $\exists b, c \in I$ tels que $b < a < c$.*

1. *Notons $\tau_a : \begin{cases} [b, a[& \to \mathbb{R} \\ x & \to \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$. Montrer que τ_a est croissante.*
2. *Montrer que τ_a est majorée.*
   En déduire que f est dérivable à gauche en a.
3. *Montrer que f est dérivable à droite en a.*
4. *Montrer que f est continue en a.*

Remarque 5.6.4 *Le théorème démontré dans cet exercice, qui dit que toute fonction convexe sur I est continue sur $\overset{\circ}{I}$ est hors programme.*

Chapitre 6

Topologie d'un evn

Contents

6.1 Éléments de topologie d'un evn

Dans toute la suite E est un espace vectoriel normé, la norme étant (sauf mention contraire) notée $\|.\|$.

6.1.1 Ouverts

Définition 6.1.1 *Soit $U \subset E$.*
On dira que U est un ouvert de E si et seulement si $\forall a \in U,\ \exists r > 0,\ B(a,r) \subset U$.

Exemple 6.1.2 $]0,1[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$.
$[0,1]$ *n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}$.
$\{0\}$ *n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}$.

Proposition 6.1.3 *Toute boule ouverte est un ouvert.*

En effet ...

Proposition 6.1.4 ***Conséquence 6.1.5*** *Tout intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$.

1. *E et $\emptyset$ sont des ouverts de E.*
2. *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert*
3. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

car ...
Mais une intersection quelconque d'ouverts de E n'est pas forcément un ouvert de E. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $O_n =]-1/n, 1/n[$. Les O_n sont bien des ouverts (car intervalles ouverts de $\mathbb{R}$).
Mais $\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n = \{0\}$ dont on a vu que ce n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Théorème 6.1.6 *Si N et N' sont des normes équivalentes, alors tout ouvert pour N est un ouvert pour N' et réciproquement.*

car ...

Conséquence 6.1.7 *Dans un evn de dimension finie, la notion d'ouvert ne dépend pas de la norme.*

Proposition 6.1.8 *$E = E_1 \times ... \times E_p$ un evn produit.*
Si $\forall k \in [\![1, p]\!]$, Ω_k ouvert de E_k, alors $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_p$ est un ouvert de l'evn produit E.

En effet ...

Exemple 6.1.9 *$A =]-1, 1[\times]-1, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*
(on pourrait aussi dire que A est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour la norme infinie de $\mathbb{R}^2$)

6.1.2 Voisinages d'un point

Définition 6.1.10 *Soit $a \in E$ et $V \subset E$.*
On dira que V est un voisinage de a ssi $\exists r > 0,\ B(a, r) \subset V$.
On notera $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Proposition 6.1.11

1. *$\forall V \in \mathcal{V}(a),\ a \in V$.*
2. *Toute partie contenant un voisinage de a est un voisinage de a.*
3. *Une intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a, mais ce n'est pas le cas d'une intersection quelconque.*

Remarque 6.1.12

1. *U ouvert de E et $a \in U \Longrightarrow U$ est un voisinage de a.*
2. *Soit $U \subset E$.*
   U ouvert de $E \iff U$ est voisinage de tous ses points.

Proposition 6.1.13 *Si N et N' sont des normes équivalentes, alors tout voisinage de a pour N est un voisinage de a pour N' et réciproquement.*

Car ...

6.1.3 Fermés d'un evn

Définition 6.1.14 *Soit $F \subset E$.*
On dira que F est un fermé ssi son complémentaire dans E est un ouvert, i.e.
$\forall x \notin F,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \cap F = \emptyset$

Exemple 6.1.15

1. *Tout singleton est un fermé.*
2. *Une boule fermée est un fermé. En effet ...*

3. *Toute sphère est un fermé. En effet ...*

Proposition 6.1.16 1. *$\emptyset$ et E sont fermés. Ce sont à la fois des ouverts et des fermés.*

2. *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*
3. *Une réunion* ***finie*** *de fermés est un fermé.*
4. *Si N et N' sont des normes équivalentes, alors tout fermé pour N est un fermé pour N' et réciproquement.*

Se démontre en travaillant sur les complémentaires et en utilisant les propriétés ensemblistes, connues mais à redémontrer : Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E.

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I}(A_i^c) \text{ et } \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I}(A_i^c)$$

Conséquence 6.1.17 *Toute partie finie de E est un fermé*

Car c'est une réunion finie de singletons dont on sait qu'ils sont fermés.

Remarque 6.1.18 ***important*** *: il existe des parties de E qui ne sont ni ouvertes ni fermées, i.e. si on sait que $A \subset E$ n'est pas un ouvert, on ne peut pas en conclure sans argument supplémentaire que A serait un fermé.*
Par exemple : $[0,1[$ n'est ni un ouvert ni un fermé de $\mathbb{R}$ (le démontrer)

Proposition 6.1.19 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. I est un fermé $\iff$ I contient ses bornes réelles. i.e. les seuls intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont les segments $[a,b]$ ainsi que les $[a,+\infty[$ et $]-\infty,b]$*

Attention : les intervalles ne sont pas les seuls fermés de $\mathbb{R}$. Par exemple :
— $[0,1]\cup[3,4]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ (dire pourquoi) mais n'est pas un intervalle.
— $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$ (le démontrer)

Proposition 6.1.20 *$E = E_1 \times ... \times E_p$ un evn produit.*
Si $\forall k \in [\![1,p]\!]$, F_k fermé de E_k, alors $F = F_1 \times ... \times F_p$ est un fermé de E.

En effet ...

Exemple 6.1.21 *$A = [-1,1]\times[-1,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.*
(on pourrait aussi dire que A est la boule unité fermée pour la norme infinie de $\mathbb{R}^2$)

6.1.4 Intérieur, adhérence, frontière d'une partie de E

Il s'agit ici de donner un sens précis à des notions intuitives, comme celle de bord, de point à l'intérieur d'une partie etc.

6.1.4.1 Intérieur

Définition 6.1.22 *Soit $A \subset E$ et $a \in E$.*

1. *a est un* ***point intérieur*** *à A ssi $\exists r > 0,\ B(a,r) \subset A$*
2. ***L'intérieur de*** *A est l'ensemble de tous les points intérieurs à A et se note $\overset{\circ}{A}$*

Remarque 6.1.23 $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Exemple 6.1.24 *Dans* $\mathbb{R}$ *:*

1. $]a,b[= \overset{\circ}{[a,b]} = \overset{\circ}{[a,b[}$
2. $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$. *Dire pourquoi.*

Proposition 6.1.25 $\overset{\circ}{A}$ *est un ouvert de* E.

Car ...

Proposition 6.1.26 A *ouvert* $\iff \overset{\circ}{A} = A$

Un sens est déjà prouvé, dire lequel.
Montrons l'autre sens ...

Proposition 6.1.27 $\overset{\circ}{A}$ *est le plus grand ouvert inclus dans* A.

En effet ....

Remarque 6.1.28 *Cette propriété permet de retrouver l'exemple 6.1.24 1.*

Conséquence 6.1.29 $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$

Exercice 6.1.30 *Soit* $A, B \subset E$. *Montrer :*

1. $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$
2. $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
3. $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$
   Donner un exemple pour lequel il n'y a pas égalité.

6.1.4.2 Adhérence

Définition 6.1.31 *Soit* $A \subset E$ *et* $a \in E$.

1. *a est un* ***point adhérent*** *à A ssi* $\forall r > 0,\ B(a,r) \cap A \neq \emptyset$, *i.e.*
   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ x \in A$ *tel que* $\|x - a\| < \varepsilon$
2. ***L'adhérence de*** *A est l'ensemble de tous les points adhérents à A et se note* $\overline{A}$

Remarque 6.1.32 ***ATTENTION*** *: la notation $\overline{A}$ a plusieurs sens : elle signifie l'adhérence de A, mais parfois elle est employée pour désigner le complémentaire d'un ensemble, ou en probabilités, l'évènement contraire de A, ou même, dans le cas de parties de $\mathbb{C}$ elle peut désigner l'ensemble des conjugués des éléments de A.*
En topologie elle désignera l'adhérence ; c'est pourquoi, en topologie, ou s'il y a risque de conflit de notation, le complémentaire de A dans E se notera A^c ou $E \setminus A$.

Remarque 6.1.33 $A \subset \overline{A}$

Proposition 6.1.34 $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

Proposition 6.1.35 $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}$

En effet ...

Conséquence 6.1.36 *$\overline{A}$ est un fermé.*

car son complémentaire est un intérieur, donc est ouvert.

Proposition 6.1.37 $\overline{A} = A \iff A$ *fermé.*

Proposition 6.1.38 *$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*

car ...

Conséquence 6.1.39 $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Exemple 6.1.40

1. $\overline{]0,1[} = [0,1] = \overline{[0,1[}$
2. $\overline{\mathbb{R}^*} = \mathbb{R}$.
3. $\overline{\mathbb{Z}} =$ *(préciser)*

6.1.4.3 Frontière

Définition 6.1.41 *Soit $A \subset E$ et $a \in E$.*

1. *a est un **point frontière de** A ssi $\forall r > 0,\ B(a,r) \cap A \neq \emptyset$ et $B(a,r) \cap (A^c) \neq \emptyset$*
2. ***La frontière de** A est l'ensemble de tous les points frontière de A et se note $fr(A)$*

Proposition 6.1.42 $fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)}$

Conséquence 6.1.43 *$fr(A)$ est un fermé de E.*

clair, car intersection de 2 fermés.

Exemple 6.1.44 *Pour a et b réels, $fr(]a,b]) = fr([a,b]) = fr(]a,b[) = fr([a,b[) = \{a,b\}$ car ...*

6.1.4.4 Normes équivalentes

Théorème 6.1.45 *Si N et N' sont des normes équivalentes et $A \subset E$, alors*

- *l'intérieur de A pour N est égal à l'intérieur de A pour N'*
- *l'adhérence de A pour N est égale à l'adhérence de A pour N'*
- *la frontière de A pour N est égale à la frontière de A pour N'*

Car ...

Remarque 6.1.46 *C'est la raison pour laquelle dans les exemples concernant les intervalles de $\mathbb{R}$ on n'a jamais précisé quelle norme on choisissait sur $\mathbb{R}$.*

6.1.5 Caractérisations séquentielles

Théorème 6.1.47 $a \in \overline{A} \iff \exists\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ tq \lim a_n = a$
i.e. $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites de A convergentes.

Car ...

Conséquence 6.1.48 *A est un fermé $\iff$ (toute suite de A qui converge a sa limite dans A)*

car ...

Application 6.1.49 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers ℓ.*
Alors $\overline{\{u_n/n \in \mathbb{N}\}} = \{u_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$

En effet ...

6.1.6 Parties denses

Définition 6.1.50 *Soit $A \subset E$.*
On dira que A est dense (dans E)

$$\begin{aligned} &\iff \overline{A} = E \\ &\iff \forall x \in E, \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \\ &\iff \forall x \in E, \forall r > 0,\ \exists\ a \in A, \|a - x\| < r \\ &\iff \forall x \in E,\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ tq\ \lim a_n = x \end{aligned}$$

Exemple 6.1.51

1. *$\mathbb{R}^*$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
2. *Q est dense dans $\mathbb{R}$: en effet, on a vu en Mpsi qu'entre 2 réels distincts il existe toujours un rationnel. Vérifier alors que Q est dense dans $\mathbb{R}$*
3. *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: à redémontrer en utilisant l'exemple du dessus.*

Définition 6.1.52 *Soit $A \subset B \subset E$*
On dira que A est dense dans B $\iff B \subset \overline{A}$
$\iff$ *tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A*

Exemple 6.1.53

1. *$]0,1[$ est dense dans $[0,1]$*
2. *$\{r \in \mathbb{Q}/ |r| < 1\}$ est dense dans $[-1,1]$*

Proposition 6.1.54 *Si N et N' sont des normes équivalentes,*
A est dense dans E pour N $\iff$ A est dense dans E pour N'

C'est dû au fait que l'adhérence de A pour N est l'adhérence de A pour N'.

6.1.7 Ouverts et fermés relativement à une partie de E

Définition 6.1.55 *Soit $A \subset E$.*

- *Soit $U \subset A$. On dira que U est un ouvert de A ssi il existe un ouvert Ω de E tel que $U = A \cap \Omega$*
  i.e. un ouvert de A (ou relativement à A) est un ensemble de la forme $A \cap \Omega$ où Ω est un ouvert de E.
- *Un fermé de A (ou relativement à A) est un ensemble de la forme $A \cap F$ où F est un fermé de E.*

Remarque 6.1.56 *Il faut bien voir que A n'est pas un espace vectoriel, donc il s'agit ici de définitions nouvelles.*

Conséquence 6.1.57 *1. U est un ouvert de $A \iff \forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap A \subset U$*

2. Si A est un ouvert de E, les ouverts de A sont les intersections des ouverts de E avec A. Ce sont donc des ouverts de E

3. Le complémentaire dans A d'un fermé relatif à A est un ouvert relatif à A.

4. Si A est un fermé de E, les fermés de A sont les intersections des fermés de E avec A. Ce sont donc des fermés de E

ATTENTION à cette notion :
— $[0, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$
— $]0, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}_+^*$
— Si $A =]0, 1] \cup \{2\}$, alors $]0, 1]$ est un ouvert de A car $]0, 1] = A \cap]0, 3/2[$, et c'est aussi un fermé de A car $]0, 1] = [0, 1] \cap A$.
Il existe donc des parties non triviales à la fois ouvertes et fermées de A.

Proposition 6.1.58 *Soit $A \subset E$ et $B \subset A$.*
B est un fermé de $A \iff$ toute suite de B qui converge dans A a sa limite dans B.

car ...

6.2 Etude locale : limite d'une fonction en un point

Dans tout ce paragraphe, E et F sont des evn.

6.2.1 Définitions

Définition 6.2.1 *Soit $A \subset E,\ a \in \overline{A},\ \ell \in F$ et $f : A \to F$.*
On dira que f a pour limite ℓ en a si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$

Lorsqu'on écrit $\|x - a\|$ il s'agit de la norme sur E alors que dans $\|f(x) - \ell\|$ il s'agit de la norme sur F.

Proposition 6.2.2 ***Caractérisation par les voisinages*** *:*
avec les mêmes notations, f a pour limite ℓ en $a \iff$
$\forall V$ voisinage de ℓ, $\exists U$ voisinage de a tq $f(U \cap A) \subset V$.

car ...

Proposition 6.2.3 *Si on change la norme sur E ou celle sur F par une norme équivalente, on ne change pas l'existence et la valeur de la limite.*

Remarque 6.2.4 *On peut remplacer dans la définition les inégalités larges par des inégalités strictes : ce sont des définitions équivalentes*

car ...

Proposition 6.2.5 *Unicité de la limite :*
Avec les mêmes notations, f a pour limite ℓ et ℓ' en $a \Longrightarrow \ell = \ell'$.

car ...

Notation 6.2.6 *f a pour limite ℓ en a se notera* $\lim_a f = \ell$

Remarque 6.2.7 ***Important*** : $\lim_a f = \ell \iff \lim_a \|f - \ell\| = 0$

L'importance de cette remarque tient au fait que la seconde limite ($\lim_a \|f - \ell\|$) est la limite en a d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

6.2.2 Extension

La définition précédente s'étend aux cas suivants :

— $f : [b, +\infty[\to F$ et $a = +\infty$ ou $a = -\infty$:
$\lim_{+\infty} f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ tq $\forall x, x > M \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

— $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$:
$\lim_a f = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) > M$

— cas où A n'est pas borné :
$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in A,\ \|x\| > M \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$

6.2.3 Limite suivant une partie

Définition 6.2.8 *Soit $f : A \subset E \to F$ et $P \subset A$. Soit $a \in \overline{P}$ et $\ell \in F$.*
On dira que f a pour limite ℓ quand x tend vers a selon P (en restant dans P) si et seulement si la restriction de f à P a pour limite ℓ en a, i.e.
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in P, \|x - a\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$
se note $\lim_{x \to a; x \in P} f(x) = \ell$

Cas particulier 6.2.9 .

1. ***Limite par valeurs différentes*** *: C'est le cas où $a \in A$ et $P = A \setminus \{a\}$*
   f a pour limite ℓ en a par valeurs différentes $\iff$
   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < \|x - a\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$

   Exemple 6.2.10 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 2$.*
   La représenter. Montrer que f a une limite en 0 par valeurs différentes. Montrer que f n'a pas de limite en 0

2. ***Limite à droite (resp à gauche) en*** *a, dans le cas où $E = \mathbb{R}$.*
   Dans ce cas $P = A \cap]a, +\infty[$.
   f a pour limite ℓ à droite en a $\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < x - a \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$

6.2.4 Remarque concernant a

Proposition 6.2.11 ***Que se passe-t-il si*** *$a \in A$?*

$$\lim_a f = \ell \text{ et } a \in A \Longrightarrow \ell = f(a)$$

car ...

6.2.5 Propriétés

Proposition 6.2.12

$$\lim_a f = \ell \Longrightarrow \ell \in \overline{f(A)}$$

car ...

Proposition 6.2.13

$$\lim_a f = \ell \in F \Longrightarrow f \textit{ est bornée au voisinage de } a$$

Clair : prendre par exemple $\varepsilon = 1$ dans la définition

6.2.6 Caractérisation par les suites

Théorème 6.2.14 *$f : A \subset E \to F$, $a \in \overline{A}$, $\ell \in F$.*
$\lim_a f = \ell \iff (\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim u_n = a \Longrightarrow \lim f(u_n) = \ell)$

car ...

Remarque 6.2.15 *Ce théorème reste vrai dans toutes les situations de limites : $a \in \overline{A}$, $a = +\infty$, $a = -\infty$ et $\ell \in F$, $\ell = +\infty$, $\ell = -\infty$*

Remarque 6.2.16 *Ce théorème est très utile pour prouver qu'une fonction n'a pas de limite*

Exemple 6.2.17 *$f : x \to \sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$*

Exemple 6.2.18 *$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $z \to e^z$. Que dire de $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |e^z|$?*

6.2.7 Opérations algébriques

Théorème 6.2.19 *E, F deux evn, $A \subset E$, $a \in \overline{A}$, $\ell, \ell' \in F$.*
$f, g : A \to F$ et $\lambda : A \to \mathbb{K}$.

1. $\lim_a f = \ell \Longrightarrow \lim_a \|f(x)\| = \|\ell\|$
2. $\lim_a f = 0 \iff \lim_a \|f\| = 0$
3. $\left.\begin{array}{l}\lim_a f = \ell \\ \lim_a g = \ell'\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_a (f+g) = \ell + \ell'$
4. $\left.\begin{array}{c}\lim_a \lambda = 0 \\ g \textit{ bornée au voisinage de } a\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_a \lambda g = 0$
5. $\left.\begin{array}{c}\lim_a g = 0 \\ \lambda \textit{ bornée au voisinage de } a\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_a \lambda g = 0$
6. $\left.\begin{array}{l}\lim_a \lambda = \alpha \\ \lim_a g = \ell'\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_a \lambda g = \alpha\ell'$

car ...

Remarque 6.2.20 ***ATTENTION*** *: le produit de 2 fonctions vectorielles n'a en général aucun sens.*

6.2.8 Composition

Théorème 6.2.21 *E, F, G des evn. $A \subset E, a \in \overline{A}$, $B \subset F$, $f : A \to F$, $g : B \to G$ avec $f(A) \subset B$*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_a f = b \\ \lim\limits_b g = \ell\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_a g \circ f = \ell$$

Tout d'abord, $a \in \overline{A}$ et $\lim\limits_a f = b \Longrightarrow b \in \overline{f(A)} \subset \overline{B}$.
Alors ...

6.2.9 Limites et coordonnées

E, F evn, $A \subset E$ avec $dim(F) = p$, $(u_1, ..., u_p)$ base de F.
$f : A \to F$, avec $f = \sum\limits_{k=1}^{p} f_k u_k$, où les fonctions f_k sont des fonctions $f_k : A \to \mathbb{K}$.

Théorème 6.2.22 *$\ell \in F$, $\ell = \sum\limits_{k=1}^{p} \ell_k u_k$, et soit $a \in \overline{A}$.*

$$\lim_a f = \ell \iff \forall k \in [\![1, k]\!],\ \lim_a f_k = \ell_k$$

Car ...

6.2.10 Espace vectoriel produit

Théorème 6.2.23 *E et $A \subset E$, $F_1, ..., F_p$ des evn. Notons $F = F_1 \times ... \times F_p$.*
Soit $f : A \to F$, $f = (f_1, ..., f_p)$
$\ell \in F$ et soit $\ell = (\ell_1, ..., \ell_p)$, et soit $a \in \overline{A}$.

$$\lim_a f = \ell \iff \forall k \in [\![1, k]\!],\ \lim_a f_k = \ell_k$$

Démonstration à faire (s'inspirer la démonstration précédente)

6.3 Continuité

6.3.1 Généralités

Définition 6.3.1 *$A \subset E$, $f : A \to F$, $a \in A$.*
On dit que f est continue en $a \iff f$ a une limite en a, et alors $\lim\limits_a f = f(a)$.
i.e. f est continue en $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon$.

Voir 6.2.11

Remarque 6.3.2 *C'est une notion locale. Au lieu de prendre x dans A on peut se contenter de prendre x dans un voisinage de a*

Proposition 6.3.3 *Si on remplace les normes sur E et sur F par des normes équivalentes, la notion de continuité est inchangée.*

Car c'est la propriété 6.2.3 sur les limites.

Théorème 6.3.4 ***Caractérisation par les suites.***
$f : A \to F$ et $a \in A$.

$$f \text{ continue en } a \iff (\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim u_n = a \Longrightarrow \lim f(u_n) = f(a)\ )$$

C'est la caractérisation d'une limite par les suites voir 6.2.14

Exemple 6.3.5 *Soit $f : x \to \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Montrons que f n'est pas continue en 0.*
Soit $u_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. $\lim u_n = 0$, mais $f(u_n) = 1$ donc $\lim f(u_n) \neq f(0)$, ce qui contredirait le théorème si f était continue en 0.

Exemple 6.3.6 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$. Étudions la convergence de cette suite.*

1. *En supposant que cette suite converge vers ℓ, que dire de ℓ ?*
2. *Montrer que cette suite converge.*
3. *Conclure.*

Remarque 6.3.7 *Le sens direct de ce théorème est souvent utilisé dans le cas de suites définies sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Il est aussi souvent utilisé pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.*
Le sens réciproque est plus souvent utilisé dans les démonstrations théoriques.

Définition 6.3.8 *f est continue sur $A \iff f$ est continue en tout point de A.*

Remarque 6.3.9 *Cette définition peut être sujette à ambiguïté dans le cas d'une fonction définie sur A si on cherche à voir si elle est continue sur une partie B de A.*

Exemple 6.3.10 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$. Comment répondre à la question f est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?*
f n'est pas continue en 0, donc n'est pas continue en tout point de $\mathbb{R}_+$. Cependant, la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est la fonction constante égale à 1. C'est cette manière de voir qui sera en général adoptée.
Mais alors f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, sans être continue sur $\mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}$ ...

Notation 6.3.11 *Pour $A \subset E$, on notera $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des fonctions de A dans F continues sur A.*

Proposition 6.3.12 *f lipschitzienne sur $A \Longrightarrow f$ continue sur A.*

6.3.2 Opérations

Proposition 6.3.13 *$A \subset E$, $a \in A$ et $f, g : A \to F$.*
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ f, g$ continues en $a \Longrightarrow \alpha f + \beta g$ continue en a.
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ f, g$ continues sur $A \Longrightarrow \alpha f + \beta g$ continue sur A.

Clair (voir le théorème sur les limites)

Conséquence 6.3.14 *$\mathcal{C}(A,F)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*

Proposition 6.3.15 *Si $F=\mathbb{K}$, i.e. $f,g : A \to \mathbb{K}$, alors le produit fg a un sens.*
Pour $a \in A$, f,g continues en $a \Longrightarrow fg$ continue en a.
f,g continues sur $A \Longrightarrow fg$ continue sur A.

Démonstration à faire.

Proposition 6.3.16 *$f : A \to F$, $g : B \to G$ avec $f(A) \subset B$.*

- *Soit $a \in A$,* $\left.\begin{array}{c} f \text{ continue en } a \\ g \text{ continue en } f(a) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f$ *continue en a*
- $\left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur } A \\ g \text{ continue sur } f(A) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f$ *continue sur A*

6.3.3 Cas des espaces produits

Proposition 6.3.17 *Soit $F = \prod_{k=1}^{n} F_k$.*
Alors $p_k : \left\{\begin{array}{cc} F & \to F_k \\ x=(x_1,...,x_n) & \to x_k \end{array}\right.$ *est continue en tout point de F car elle est 1-lipschitzienne.*

Théorème 6.3.18 $f : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F = \prod_{k=1}^{n} F_k \\ x & \to & f(x) = (f_1(x),...,f_n(x)) \end{array}\right.$ *. Ainsi $f_k = p_k \circ f$*
Soit $a \in E$. f continue en $a \iff \forall k$, f_k est continue en a.

Car ...

Exemple 6.3.19
1. *Les fonctions polynomiales de p variables $(\mathbb{K}^p, \|.\|_\infty) \to \mathbb{K}$ sont continues en tout point de $\mathbb{K}^p$ (car produits de fonctions continues sur $\mathbb{K}^p$)*
2. *Les fonctions rationnelles de p variables $(\mathbb{K}^p, \|.\|_\infty) \to \mathbb{K}$ sont continues en tout point de leur ensemble de définition.*

Remarque 6.3.20 *ATTENTION : Dans ce théorème, c'est l'espace d'arrivée qui est un espace produit. Le théorème ne concerne pas le cas où l'espace de départ est un espace produit Voir l'exemple :*

Exemple 6.3.21 *Soit* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}\right.$

1. *Soit $f_1 : x \to f(x,0)$. Montrer que f_1 est continue en 0.*
2. *Idem pour $f_2 : y \to f(0,y)$.*
3. *Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ (on pourra utiliser le théorème 6.3.4)*

6.3.4 Cas où F est de dimension finie

Théorème 6.3.22 *Soit $f : A \subset E \to F$ avec $dim(F) = n$, $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base de F et soit $a \in A$*
Pour $x \in A, f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)u_k$ où $f_k : A \to \mathbb{K}$.

$$f \text{ continue en } a \iff \forall k,\ f_k \text{ continue en } a$$

Car ...

Ce théorème dit que pour prouver la continuité de f il est équivalent de prouver la continuité des fonctions coordonnées. On peut donc se ramener à des fonctions de E dans $\mathbb{K}$.

6.3.5 Des exemples de fonctions continues

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et $l \in [\![1, p]\!]$
   $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to \mathbb{K} \\ A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} & \to a_{k,l} \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ Car si on choisit la norme infinie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application est 1-lipschitzienne.
   On pourrait aussi dire que c'est une fonction coordonnée de l'application identité.

2. $\begin{cases} \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) & \to \lambda A \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   Car ..

3. $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2 & \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \to A + B \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$
   Car ...

4. $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \to AB \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$
   Car ...

5. $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \to^t A \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
   Car ...

6. $\begin{cases} \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) & \to \mathbb{K} \\ A & \to tr(A) \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})$.
   Car ...

7. $\begin{cases} \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) & \to \mathbb{K} \\ A & \to det(A) \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})$.
   Car ...

Exercice 6.3.23 *Montrer que l'application* $\begin{cases} GL_n(\mathbb{K}) & \to GL_n(\mathbb{K}) \\ A & \to A^{-1} \end{cases}$ *est continue sur* $GL_n(\mathbb{K})$

On pourra utilement utiliser la comatrice ...

6.3.6 Continuité globale sur A

Rappel : $\mathcal{C}(A, F)$ est un espace vectoriel.

Théorème 6.3.24 *Soit* $A \subset E$ *et* $f : A \to F$.
f *continue sur* A $\iff$ *l'image réciproque de tout ouvert de* F *est un ouvert relatif de* A
$\iff$ *l'image réciproque de tout fermé de* F *est un fermé relatif de* A

Car ...

Exemple 6.3.25

1. $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy < 2\right\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$. *En effet,* $f : (x, y) \to xy$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$. *Or* $A = f^{-1}(]-\infty, 2[)$ *et* $]-\infty, 2[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Donc* A *est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue, ce qui prouve que* A *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.
2. $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^2$. *Car ...*
3. $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < \frac{1}{x}\right\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$. *Car ...*
4. *Montrer que* $D = \{x \in \mathbb{R}^* / \sin(1/x) = 0\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^*$.
   Montrer que D *n'est pas un fermé de* $\mathbb{R}$.
5. *Montrer que* $GL_n(\mathbb{K})$ *est un ouvert de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

ATTENTION : l'image directe d'un ouvert (resp fermé) n'est pas nécessairement un ouvert (resp fermé) de l'espace d'arrivée.

Exemple 6.3.26

1. $\sin$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et* $]0, 2\pi[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Mais* $\sin(]0, 2\pi[) = [-1, 1]$ *qui n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}$, *c'est même un fermé.*
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \to 1/x \end{cases}$ *est continue sur* $]0, +\infty[$. *Donner un fermé de* $]0, +\infty[$ *dont l'image n'est pas un fermé de* $\mathbb{R}$.

6.3.7 Densité

Théorème 6.3.27 *Soient* $f, g : A \to F$ *continues sur* A *et soit* X *une partie dense dans* A.
$\forall x \in X, f(x) = g(x) \Longrightarrow \forall x \in A,\ f(x) = g(x)$,
i.e. si f *et* g *continues sur* A *coincident sur une partie dense de* A, *alors elles sont égales.*

Car ...

Exercice 6.3.28 *Le but de cet exercice est de montrer que* $GL_n(\mathbb{K})$ *est dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j}$. *Considérons* $f : x \to det(A - xI_n)$. *Montrer que* f *est une fonction polynomiale de degré* n *sur* $\mathbb{K}$.
2. *En déduire que* f *a un nombre fini de racines.*
3. *Montrer* $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{K},\ 0 < |x| < \alpha \Longrightarrow f(x) \neq 0$.
4. *Construire alors une suite* $(A_p)_p \in GL_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim A_p = A$. *Conclure.*

6.3.8 Continuité uniforme

Définition 6.3.29 *$A \subset E$, $f : A \to F$.*
On dit que f est uniformément continue sur A $\Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \ \forall x, y \in A, \ \|x-y\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x)-f(y)\| \leqslant \varepsilon.$

Exercice 6.3.30 *Écrire la définition de f n'est pas uniformément continue sur A.*

Exemple 6.3.31 *Soit $A \subset E$. la fonction $f : \begin{cases} A & \to \mathbb{R} \\ x & \to d(x,A) \end{cases}$ est uniformément continue sur A.*

Car ...

Proposition 6.3.32 *La propriété de continuité uniforme est conservée si on remplace la norme sur A ou sur F par une norme équivalente.*

Démonstration à rédiger ...

Proposition 6.3.33 *f uniformément continue sur $A \Longrightarrow f$ continue sur A*

car ...

Proposition 6.3.34 *f lipschitzienne sur $A \Longrightarrow f$ uniformément continue sur A*

car ..

Ceci nous fournit beaucoup de fonctions uniformément continues sur A.

Remarque 6.3.35 *La réciproque de cette propriété est fausse : on verra un peu plus tard des fonctions uniformément continues sur un intervalle I qui ne sont pas lipschitziennes sur I.*

Exercice 6.3.36 .

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ uniformément continue sur }]a,b] \\ f \text{ uniformément continue sur } [b,c[\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ uniformément continue sur }]a,c[$$

Car ...

Théorème 6.3.37 *S'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim(x_n - y_n) = 0$ et la suite $(f(x_n) - f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors f n'est pas uniformément continue sur A.*

Car ...

Exemple 6.3.38

1. *$f : x \to x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, quoique continue. Le prouver en prenant $x_n = n$ et $y_n = n + \dfrac{1}{n}$*
2. *Montrer que $f : x \to \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ quoique bornée sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 6.3.39 ***Composition***
Soit f uniformément continue de A dans F et g uniformément continue de B dans G avec $f(A) \subset B \subset F$. Alors $g \circ f$ est uniformément continue de A dans G.

Faites la démonstration.

6.3.9 Continuité des applications linéaires

Théorème 6.3.40 *E et F deux evn, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est uniformément continue sur E.*
2. *f est continue sur E*
3. *f est continue en 0.*
4. *f est bornée sur $B_f(O_E,1)$ (boule fermée unité).*
5. *f est bornée sur la sphère unité.*
6. *$\exists k > 0, \forall x \in E, \ \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$*

Car ...

Notation 6.3.41 *On notera $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F continues.*
On notera $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E continus.

Exemple 6.3.42

1. *Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^0([O,1],\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ f & \to \displaystyle\int_0^1 f \end{cases}$. On munit $E = \mathcal{C}^0([O,1],\mathbb{R})$ de la norme infinie.*
   Alors φ est continue de E dans $\mathbb{R}$ car ...

2. *Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|P\| = Sup\{|P(t)|/t \in [0,1]\}$. Montrer que $\|.\|$ est bien une norme sur E.*
   Soit $\varphi : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ P & \to P(2) \end{cases}$. φ est clairement linéaire.
   — *On considère la suite $(P_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $\forall n, \ P_n = X^n$. Déterminer $\|P_n\|$.*
   — *L'application φ est-elle continue sur E ?*

Théorème 6.3.43 *E, F, G trois evn sur $\mathbb{K}$, $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire.*
B continue sur $E \times F \iff \exists k \geqslant 0, \forall x, y \in E \times F, \ \|B(x,y)\| \leqslant k\|x\|\|y\|$ où $E \times F$ est muni de la norme infinie relative aux normes de E et F.

Car ...

Conséquence 6.3.44 *E espace préhilbertien réel.*
$\varphi : \begin{cases} E \times E & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \to < x,y > \end{cases}$ *est continue (Cauchy-Schwarz)*

6.4 Compacité

Il s'agit ici de généraliser la propriété de Bolzano-Weierstrass rencontrée dans le chapitre sur les suites réelles.

6.4.1 Définition séquentielle

Définition 6.4.1 *E un evn, et $C \subset E$.*
C est un compact de E $\iff$ toute suite de C possède au moins une valeur d'adhérence dans C.
*i.e. $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tq la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ converge **dans** C.*

Proposition 6.4.2 *Si C est compact, alors toutes les valeurs d'adhérence des suites de C sont dans C.*

car ...

Exemple 6.4.3
1. *Tout segment de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$, mais ce ne sont pas les seuls : une réunion de 2 segments est encore un compact de $\mathbb{R}$ (on va le voir au-dessous)*
2. *$\mathbb{R}$ n'est pas compact : prendre par exemple la suite $(n)_n$.*
3. *Un singleton est un compact.*

Proposition 6.4.4 *Une réunion finie de parties compactes de E est un compact de E.*

Car ...

Conséquence 6.4.5
1. *Une réunion finie de segments de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$.*
2. *Toute partie finie de E est un compact.*

Proposition 6.4.6 *$\forall k \in [\![1, p]\!]$, C_k compact de l'evn E_k.*
Alors $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} C_k$ est un compact de $E = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} E_k$ pour la topologie produit.

Car ...

6.4.2 Fermeture et compacité

Théorème 6.4.7 *C compact de $E \Longrightarrow \begin{cases} C & \text{fermé} \\ C & \text{borné} \end{cases}$*

Car ...

Théorème 6.4.8 *Soit C un compact et $F \subset C$.*
F fermé de E $\iff$ F compact de E.

Car ...
ATTENTION. Ne pas faire dire à ce théorème plus qu'il n'en dit : un fermé de E n'est pas toujours un compact (comme on le voit dans le théorème 6.4.7), ici ne pas oublier l'hypothèse "F est inclus dans un compact".

Théorème 6.4.9 *C compact de E, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$.*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a 1 et 1 seule valeur d'adhérence}$$

Un sens est évident. Lequel ?
Montrons l'autre sens ...

6.4.3 Continuité et compacité

Théorème 6.4.10 *E, F deux evn, C compact de E et $f : C \to F$.*
f continue sur $C \Longrightarrow f(C)$ compact de F.
i.e. l'image d'un compact par une application continue est un compact.

Car ...
ATTENTION. On ne sait rien sur l'image réciproque d'un compact par une application continue, comme le montre l'exemple suivant : $f = \sin$, $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$ qui n'est pas compact alors que $[-1,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Théorème 6.4.11 *C compact de E et $f : C \to \mathbb{R}$ continue sur C (fonction à valeurs réelles) Alors f est bornée sur C et atteint ses bornes, i.e.*
$\exists a \in C$ tel que $f(a) = \underset{C}{Inf}(f)$ et $\exists b \in C$ tel que $f(b) = \underset{C}{Sup}(f)$

Car ...
Ce théorème est fondamental : il permet de montrer que la borne sup de C vérifie les propriétés caractérisant C.

Exemple 6.4.12 *C un compact de E et $a \in E$. Alors $\exists x_0 \in C$ tel que $d(a, C) = \|a - x_0\|$.*
En effet, prenons $f : \begin{cases} C & \to \mathbb{R} \\ x & \to \|x - a\| \end{cases}$. f est continue sur C avec C compact, donc f est bornée et atteint son minimum. D'où ...

Conséquence 6.4.13 *C compact et $f : C \to E$ continue. Alors l'application $x \to \|f(x)\|$ est continue, bornée et atteint ses bornes*

Clair.

Théorème 6.4.14 ***Théorème de Heine***
C compact et $f : C \to F$.

$$f \text{ continue sur } C \Longrightarrow f \text{ uniformément continue sur } C$$

Car ...

Exemple 6.4.15 *La fonction racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ car uniformément continue sur $[0,1]$ par le théorème de Heine, et uniformément continue sur $[1, +\infty[$ (à prouver).*
Montrer que cette fonction n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
On dispose donc ici d'un exemple de fonction uniformément continue et non lipschitzienne, prouvant que la réciproque de la propriété 6.3.34 est fausse.

6.5 Connexité par arcs

6.5.1 Chemin continu joignant deux points

Définition 6.5.1 *Soit $A \subset E$ et $a, b \in A$.*
On appelle chemin continu de A joignant a et b toute application u vérifiant

$$u : [0,1] \to A$$
$$u \text{ continue sur } [0,1]$$
$$u(0) = a \text{ et } u(1) = b$$

Exemple 6.5.2 *Si A est convexe et a, b deux point de A. L'application* $\begin{cases}[0,1] & \to A\\ t & \to (1-t)a+tb\end{cases}$ *est un chemin continu de A joignant a et b.*

Proposition 6.5.3 *On définit une relation entre les points de A par*
pour a et b dans A, $a\mathcal{R}b \iff$ *il existe un chemin continu de A joignant a et b*
Cette relation est une relation d'équivalence sur A.

car ...

Définition 6.5.4 *Les classes d'équivalence par cette relation sont appelées composantes connexes par arcs de A.*

Proposition 6.5.5 *Les composantes connexes par arcs de A forment une partition de A.*

car ...

6.5.2 Parties connexes par arcs

Définition 6.5.6 *Soit* $A \subset E$*. On dira que A est connexe par arcs si et seulement si,* $\forall a, b \in A$ *il existe un chemin continu joignant a et b dans A.*

Remarque 6.5.7 *Aconnexe par arcs* $\iff$ *A possède 1 seule composante connexe par arcs.*

Proposition 6.5.8

$$A \text{ convexe} \implies A \text{ connexe par arcs}$$

C'est ce qu'on a vu dans l'exemple 6.5.2
Mais la réciproque est fausse :

Autre contre exemple : la **sphère** unité est connexe par arcs mais pas convexe.

Définition 6.5.9 *Soit* $A \subset E$*. On dira que A est étoilé si et seulement si*

$$\exists a \in A, \forall x \in A, [a, x] \subset A.$$

Exemple 6.5.10 .

Proposition 6.5.11 *A étoilé* $\implies$ *A connexe par arcs.*

Car ...

Théorème 6.5.12 *Les parties connexes par arcs de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Car ...

6.5.3 Connexité par arcs et continuité

Théorème 6.5.13 $\left.\begin{array}{c} A \textit{ connexe par arcs} \\ f : A \to F \textit{ continue} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(A)$ *connexe par arcs.*

car ...

Conséquence 6.5.14 $\left.\begin{array}{c} A \textit{ connexe par arcs} \\ f : A \to \mathbb{R} \textit{ continue} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(A)$ *intervalle de* $\mathbb{R}$.

car $f(A)$ connexe par arcs de $\mathbb{R}$ donc intervalle.

Conséquence 6.5.15 .

$$\left.\begin{array}{c} A \textit{ connexe par arcs} \\ f : A \to \mathbb{R} \textit{ continue} \\ a, b \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall m \textit{ entre } f(a) \textit{ et } f(b), \exists c \in A \textit{ tel que } f(c) = m.$$

Car ...

Exemple 6.5.16
1. *$GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. En effet, l'application* $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ *est continue et surjective, mais son image n'est pas connexe par arcs. Donc l'ensemble de départ n'est pas connexe par arcs.*
2. $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$ *est connexe par arcs. Dire pourquoi.*

6.6 Cas des espaces vectoriels de dimension finie

6.6.1 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 6.6.1 *Rappel : E un evn de dimension finie. Alors toute suite bornée de E possède une valeur d'adhérence.*

6.6.2 Des conséquences

Théorème 6.6.2 *Une partie d'un evn de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Un sens a déjà été prouvé. dire lequel.
Montrons l'autre sens ...

Conséquence 6.6.3 *Une suite bornée d'un evn de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Car ...

6.6.3 Sev de dimension finie

Théorème 6.6.4 *E un evn et F un sev de E de dimension finie. Alors F est fermé.*

Car ...

6.6.4 Continuité

Théorème 6.6.5 *E espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie)*

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \Longrightarrow f \text{ continue sur } E$$

i.e. toute application linéaire de E de dimension finie vers F est continue.

Car ...

Conséquence 6.6.6 $dim(E) < +\infty \Longrightarrow L_c(E, F) = L(E, F)$

Exemple 6.6.7
1. *On munit* $\mathbb{R}[X]$ *de la norme* $\|P\| = Sup\{|P(x)| / x \in [0, 1]\}$. *Soit* D : $\begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R}[X] \\ P & \to P' \end{cases}$. *En considérant les polynômes* $P_n = X^n/n$ *montrer que* D *n'est pas continue.*
2. *Montrer que la dérivation est continue sur* $\mathbb{R}_n[X]$

Théorème 6.6.8 $E_1, ..., E_p$ *des evn de dimension finie, et* F *un evn.*
$f : E_1 \times ... \times E_p \to F$ *application p-linéaire, alors* f *est continue*

Car ...

Exemple 6.6.9
1. *On redémontre ainsi que l'application déterminant est continue sur* E^n.
2. *On redémontre aussi que l'application* $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \to AB \end{cases}$ *est continue sur* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

Chapitre 7

Fonctions vectorielles

Contents

Dans tout ce chapitre I est un intervalle de $\mathbb{R}$, F est un evn sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, et les fonctions sont des fonctions de I dans F.

7.1 Dérivation

7.1.1 Dérivée en un point

Définition 7.1.1 — *Soit $a \in I$. On dira que f est dérivable en a si et seulement si la fonction $t \to \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ a une limite dans F quand t tend vers a (par valeurs différentes). Cette limite, si elle existe est appelée nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.*
si f est dérivable en a, alors $f'(a) = \lim\limits_{t\to a} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$

— *Lorsque $a \in \overset{\circ}{I}$, on dira que f est dérivable à droite (resp à gauche) en a si et seulement si $t \to \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ a une limite dans F quand t tend vers a par valeurs supérieures (resp par valeurs inférieures). Cette limite, si elle existe est appelée dérivée de f à droite (resp à gauche) en a et se note $f'_d(a)$ (resp $f'_g(a)$) .*
Si f est dérivable à droite en a, alors $f'_d(a) = \lim\limits_{t\to a, t>a} \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$

Remarque 7.1.2 *Bien comprendre que dans $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$, le numérateur $f(t)-f(a)$ est un vecteur, alors que $t-a$ est un réel. Il s'agit d'une multiplication scalaire : $\dfrac{1}{t-a}.(f(t)-f(a))$*

Remarque 7.1.3 *On ne parle pas de dérivée à droite (ou à gauche) lorsque a est borne de I.*

Remarque 7.1.4 *Lorsque $a \in \overset{\circ}{I}$, f dérivable en a* $\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{array} \right.$

Proposition 7.1.5 .

$$\begin{array}{lcl} f \text{ dérivable en } a \text{ de dérivée } \ell & \Longleftrightarrow & \forall t \in I,\ f(t) = f(a) + (t-a)\ell + (t-a)\varepsilon(t-a) \text{ et } \lim_0 \varepsilon = 0 \ (\varepsilon : J \to F) \\ & \Longleftrightarrow & \forall h \text{ tq } a+h \in I,\ f(a+h) = f(a) + h\ell + h\varepsilon(h) \text{ et } \lim_0 \varepsilon = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \forall h \text{ tq } a+h \in I,\ f(a+h) = f(a) + h\ell + o_0(h) \end{array}$$

(ici $\varepsilon : J \to F$ où J est l'intervalle I translaté de $-a$.)
car ...

Remarque 7.1.6 *Si f vérifie $\forall t \in I,\ f(t) = f(a) + (t-a)\ell + (t-a)\varepsilon(t-a)$ et $\lim_0 \varepsilon = 0$, on dit que f est différentiable en a.*
Ainsi, pour f définie sur un intervalle I, f dérivable en $a \Longleftrightarrow f$ différentiable en a.

Conséquence 7.1.7 *f dérivable en $a \Longrightarrow f$ continue en a.*

Remarque 7.1.8 *Donner un exemple montrant que la réciproque est fausse, i.e. une fonction continue en un point mais non dérivable en ce point.*

Exemple 7.1.9 *Montrer que la fonction $t \to t\sin(1/t)$ est prolongeable par continuité en 0, mais que la fonction ainsi prolongée n'est pas dérivable en 0, et n'a ni dérivée à droite en 0 ni dérivée à gauche en 0.*

Interprétation géométrique : Supposons f continue au voisinage de a et dérivable en a. Pour $t \neq a$, si $f(t) \neq f(a)$, le vecteur $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$ est un vecteur directeur de la droite D_t passant pas les points $f(t)$ et $f(a)$.
Si $f'(a) \neq 0$, alors la droite $\Delta_a = f(a) + Vect(f'(a))$ est position limite des droites D_t quand t tend vers a. On dit que Δ_a est la tangente à l'arc paramétré par $t \to f(t)$ au point de paramètre a.

Théorème 7.1.10 *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de F. On peut écrire $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$ où les f_k sont les fonctions coordonnées de f, $f_k : I \to \mathbb{K}$.*
f dérivable en $a \Longleftrightarrow$ les f_k sont dérivables en a, et alors $f'(a) = \sum_{k=1}^{n} f'_k(a) e_k$

car ...

Exemple 7.1.11 — *Une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dérivable en a si et seulement sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.*

— *Soit $f : t \to \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$. f est dérivable en $t_0 \iff a, b, c, d$ sont dérivables en t_0 et alors $f'(t_0) = \begin{pmatrix} a'(t_0) & b'(t_0) \\ c'(t_0) & d'(t_0) \end{pmatrix}$*

7.1.2 Fonction dérivée

Définition 7.1.12 *Si f est dérivable en tout point de I, on définit sur I sa fonction dérivée par : $t \to f'(t)$*
Par récurrence on peut définir, si elles existent, les dérivées successives de f : f', $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ etc.

Notation 7.1.13 *On notera $\mathcal{D}(I, F)$ l'ensemble des fonction dérivables sur I, et $\mathcal{D}^k(I, F)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I.*

Proposition 7.1.14 *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de F. On peut écrire $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$ où les f_k sont les fonctions coordonnées de f, $f_k : I \to \mathbb{K}$.*
f dérivable sur $I \iff$ les f_k sont dérivables sur I et alors $f' = \sum_{k=1}^{n} f_k' e_k$

C'est le théorème 7.1.10

Théorème 7.1.15 *Soit $f : I \to F$ dérivable sur I.*

$$f \text{ est constante sur } I \iff f' = 0 \text{ sur } I \qquad \text{i.e.}$$
$$\exists C \in F,\ \forall x \in I,\ f(x) = C \iff f' = 0$$

Car ...
Insistons sur le fait que ce théorème est vrai si I est un intervalle

Exemple 7.1.16 *Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f : t \to \begin{cases} 1 \text{ si } t > 0 \\ -1 \text{ si } t < 0 \end{cases}$. f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$ mais pourtant $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ f'(t) = 0$.*

7.1.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 7.1.17 ***Linéarité***
f, g dérivables en a. $\forall \lambda, \mu \in K$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$
En d'autres termes, l'ensemble $D_a(I, F)$ des fonctions dérivables en a est un espace vectoriel, et l'application $\begin{cases} D_a(I, F) & \to \mathcal{F}(I, F) \\ f & \to f'(a) \end{cases}$ est linéaire.

Car ... (revenir à la différentiabilité)

Conséquence 7.1.18 *$\mathcal{D}(I, F)$ est un espace vectoriel et l'application $\begin{cases} \mathcal{D}(I, F) & \to \mathcal{F}(I, F) \\ f & \to f' \end{cases}$ est linéaire.*

Théorème 7.1.19 ***Dérivation du produit d'une fonction vectorielle par une fonction numérique***
Soit $f : I \to F$ et $\varphi : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$. Alors la fonction $\varphi f : I \to F$ est dérivable en a et $(\varphi f)'(a) = \varphi'(a)f(a) + \varphi(a)f'(a)$

Revenir à la différentiabilité.

Théorème 7.1.20 *Soit $f : I \to F$, $u \in \mathcal{L}(F, G)$, $a \in I$.*
f dérivable en $a \Longrightarrow u \circ f$ dérivable en a et $(u \circ f)'(a) = u \circ f'(a)$.

Car ... (encore la différentiabilité)

Exemple 7.1.21 $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \to (t^2, t^3) \end{cases}$ *et* $u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \to (x + y, 2x - 4y) \end{cases}$. *Exprimer $u \circ f$ et vérifier que $(u \circ f)'(1) = u \circ f'(1)$.*

Théorème 7.1.22 ***Composition d'une fonction numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec une fonction vectorielle.***
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$.
Soit $f : J \to F$ dérivable en $\varphi(a)$, avec J intervalle et $\varphi(I) \subset J$.
Alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et $(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)f'(\varphi(a))$

Remarquons que dans $\varphi'(a)f'(\varphi(a))$, $\varphi'(a)$ est un réel et $f'(\varphi(a))$ est un vecteur de F, cette multiplication est donc une multiplication scalaire.
Démonstration : ...

Théorème 7.1.23 ***Dérivation d'une forme bilinéaire de fonctions.***
Soit $\Phi : F \times F \to G$ une application bilinéaire (F de dimension finie, donc Φ est continue)
Soit $f, g : I \to F$ dérivables en $a \in I$.
alors $H : \begin{cases} I & \to G \\ t & \to \Phi(f(t), g(t)) \end{cases}$ *est dérivable en a et $H'(a) = \Phi(f'(a), g(a)) + \Phi(f(a), g'(a))$.*

Car ...

Remarque 7.1.24 *Plaçons nous dans le cas où $F = \mathbb{R}$. soit $\Phi : (x, y) \to xy$. Φ est bilinéaire. Alors pour f et g fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en a, on retrouve le théorème sur la dérivée de fg en a. Le vérifier.*

Application 7.1.25 *Si F est un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire noté $< .,. >$ (bilinéaire).*
Alors pour f et g dérivables en a, l'application $t \to < f(t), g(t) >$ est dérivable en a de dérivée en a : $< f'(a), g(a) > + < f(a), g'(a) >$.
Pour f et g dérivables sur I, $< f, g >' = < f', g > + < f, g' >$

Conséquence 7.1.26 *Soit F est un espace préhilbertien et $f : I \to F$ dérivable sur I, alors l'application $\|f\|^2$ est dérivable sur I et $(\|f\|^2)' = 2 < f, f' >$.*
Par exemple, soit $e : I \to F$ dérivable sur I et telle que $\forall t \in I$, $\|e(t)\| = 1$. Montrer que $\forall t \in I$, $e(t) \perp e'(t)$.

Théorème 7.1.27 ***Généralisation aux applications n-linéaires.***
Soit $\Phi : F^n \to G$ une application $n-$linéaire.
Soit $(f_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ tq $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $f_k : I \to F$ est dérivable en a ($a \in I$).
Alors $H = \Phi(f_1, ..., f_n)$ est dérivable en a et

$$H'(a) = \Phi(f_1'(a), f_2(a), ..., f_n(a)) + \Phi(f_1(a), f_2'(a), ..., f_n(a)) + ... + \Phi(f_1(a), ..., f_{n-1}(a), f_n'(a))$$

Car ...

Conséquence 7.1.28 ***Dérivation d'un déterminant :***
Soit $A : \begin{cases} I & \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \to (a_{i,j}(t))_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} \end{cases}$ *avec* $\forall i,j,\ a_{i,j} : I \to \mathbb{R}$ *dérivable sur* I.
Alors $det(A) : \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ t & \to det(A(t)) \end{cases}$ *est dérivable sur* I *et* $\forall t \in I,\ det(A)'(t) = \sum_{k=1}^{n} det(A_k(t))$ *où* Ak *est la fonction matricielle constituée des colonnes* $[C_1, ..., C_{k-1}, C'_k, C_{k+1}, ..., C_n]$ *où* C_j *est la* $j^{ième}$ *colonne de* A.
Par exemple la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \to det\begin{pmatrix} t^2 & t^3 \\ 5t & 4t - t^2 \end{pmatrix} \end{cases}$ *a pour fonction dérivée :*
$t \to \begin{vmatrix} 2t & t^3 \\ 5 & 4t - t^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t^2 & 3t^2 \\ 5t & 4 - 2t \end{vmatrix}$ *ce qu'on peut aisément vérifier en explicitant l'expression de* f

7.1.3.1 Cas des fonctions numériques : 2 rappels

Théorème 7.1.29 • *Soit* $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$ *tel que* $f(a) \neq 0$. *On suppose* f *dérivable en* a.
Alors $\frac{1}{f}$ *est dérivable en* a *et* $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$
• *et donc si* f *est dérivable sur* I *et ne s'annule pas sur* I,
alors $\frac{1}{f}$ *est dérivable sur* I *et* $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

Pour la preuve, voir le cours de Mpsi.

Théorème 7.1.30 *Soit* $f : I \to J = f(I)$ *continue, strictement monotone (donc bijective de* I *sur* J*).*
Soit $a \in I$ *et* f *dérivable en* a.
Alors f^{-1} *est dérivable en* $b = f(a) \iff f'(a) \neq 0$ *et alors*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \ i.e.\ \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$$

7.1.4 Fonctions de classe C^k

Définition 7.1.31 *Soit* $f : I \to F$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$.
• *On dira que* f *est de classe* C^k *sur* I *si et seulement si* f *admet une dérivée d'ordre* k *en tout point de* I *et si* $f^{(k)} : I \to F$ *est continue sur* I.
• *On note* $C^k(I, F)$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^k *sur* I *à valeurs dans* F.
• *On dira qu'une fonction est de classe* C^∞ *sur* I *si et seulement si* $\forall k \in \mathbb{N}$, f *est de classe* C^k.
• *On note* $C^\infty(I, F)$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^∞ *sur* I *à valeurs dans* F.

Remarque 7.1.32 *L'existence de* $f^{(k)}$ *sous-entend celle de* $f', f'', ..., f^{(k-1)}$, *qui sont toutes continues sur* I *car dérivables sur* I.

Remarque 7.1.33 *Pour montrer que* f *est* C^∞ *sur* I *il suffit de montrer que* f *est dérivable à tout ordre sur* I.

Conséquence 7.1.34 .
$C^\infty(I, F) \subset ... \subset C^{k+1}(I, F) \subset C^k(I, F) \subset ... \subset C^1(I, F) \subset C^0(I, F) = C(I, F)$

7.1.4.1 Algèbre $C^n(I,\mathbb{K})$

Théorème 7.1.35 ***Formule de Leibniz***

$$\varphi \in C^n(I,\mathbb{K}), f \in C^n(I,F) \Longrightarrow \varphi f \in C^n(I,F) \text{ et}$$
$$(\varphi f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(k)} f^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)} f^{(k)}$$

Il faut être capable de redémontrer ce théorème (par récurrence).

Conséquence 7.1.36 *$C^n(I,\mathbb{K})$ est une algèbre.*

car ...

Exemple 7.1.37 *Donner la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $t \to (t^3 - 7t^2)e^{-2t}$*

7.1.4.2 Composition de fonctions de classe C^n

Théorème 7.1.38 *I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.*
Soit $\varphi : I \to J$ de classe C^n sur I et soit $f : J \to F$ de classe C^n sur J. Alors $f \circ \varphi$ est de classe C^n sur I.

Là encore, par récurrence : ...

Remarque 7.1.39 *Il n'y a pas de formule simple donnant l'expression de $(f \circ \varphi)^{(n)}$ en fonction des dérivées de f et de φ.*

Théorème 7.1.40 *La fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R}^* \\ x & \to \dfrac{1}{x} \end{cases}$ est de classe C^∞ et*

$$\forall x \neq 0,\ \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \quad \text{(notation abusive)}$$

7.2 Intégration sur un segment

Dans toute la suite E un evn de dimension finie.

7.2.1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 7.2.1
- *Soit I un segment et $f \in \mathcal{F}(I,E)$. On dira que f est continue par morceaux sur $I = [a,b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = (a_0 = a, a_1, ..., a_p = b)$ avec $a_0 < a_1 < ... < a_p$ telle que*

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!], \begin{cases} \text{la restriction de } f \text{ à }]a_k, a_{k+1}[\text{ est continue} \\ f \text{ a une limite à droite dans } E \text{ en } a_k \\ f \text{ a une limite à gauche dans } E \text{ en } a_{k+1} \end{cases}$$

- *Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{F}(I,E)$. On dira que f est continue par morceaux sur I si et seulement si pour tout segment $J \subset I$, f est continue par morceaux sur J.*

Notation 7.2.2 *L'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans E se note $\mathcal{CM}(I,E)$.*

Exemple 7.2.3 *1. La fonction Partie Entière E est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.*
2. La fonction $x \to \begin{cases} 1/x & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ car ...
3. On considère la fonction $f : x \to x^2 E(1/x)$. Est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Est-elle continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$?

Remarque 7.2.4
- *Si f est continue par morceaux sur un segment, alors elle a un nombre fini de points de discontinuité sur ce segment*
- *Si f est continue par morceaux sur un intervalle non borné, il est possible que f ait une infinité de points de discontinuité (voir la fonction Partie Entière)*

7.2.2 Intégration

Définition-théorème 7.2.5 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.*
Soit $f \in \mathcal{F}(I,E)$ avec $I = [a,b]$ et $a < b$; on note $(f_1, ..., f_n)$ les fonctions coordonnées de f dans $\mathcal{B}$, i.e. $\forall t \in I,\ f(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t) e_k$.

Alors $f \in \mathcal{CM}(I,E) \iff \forall k,\ f_k \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ et le vecteur $\sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b f_k \right) e_k$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E.

Ce vecteur se nomme intégrale sur $[a,b]$ de f et se note $\int_a^b f$ ou $\int_I f$ ou $\int_I f(t)dt$ ...

car ...

7.2.3 Propriétés

À partir des propriétés connues de l'intégrale d'une fonction définie sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$ on peut déduire les propriétés suivantes pour les fonctions du segment I à valeurs dans E :

Théorème 7.2.6 ***Linéarité*** *Soit I un segment*
L'application $\begin{cases} \mathcal{CM}(I,E) & \to E \\ f & \to \int_I f \end{cases}$ est linéaire, i.e.

$$\forall f, g \in \mathcal{CM}(I,E),\ \forall \alpha, \beta,\ \int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$$

Clair : on passe aux fonctions coordonnées.

Notation 7.2.7 *Soit $a, b \in I$ Si $a > b$, $\int_a^b f$ désigne $-\int_b^a f$, et $\int_a^a f = 0$*

Théorème 7.2.8 ***Chasles*** *:*
Avec ces notations, $\forall a, b, c \in I,\ \forall f \in \mathcal{CM}(I,E),\ \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$

Clair là aussi : on passe aux fonctions coordonnées.

Théorème 7.2.9 ***Sommes de Riemann.***
Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$ et $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_p)$ une subdivision de $I = [a,b]$, de pas constant. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

Le vecteur $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$ *est parfois noté* $R_n^-(f)$
Le vecteur $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$ *est parfois noté* $R_n^+(f)$

Clair car on sait qu'une suite de E converge si et seulement si ses suites coordonnées convergent et ...

Théorème 7.2.10 ***Inégalité de la norme***
Soit I un segment, $f \in \mathcal{CM}(I,E)$ et $\|.\|$ une norme sur E. Alors, pour $a \leqslant b$, $\left\|\displaystyle\int_a^b f\right\| \leqslant \displaystyle\int_a^b \|f\|$

En effet ...

7.2.4 Dérivation : intégrale fonction de sa borne supérieure

Définition 7.2.11 *Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}(I,E)$. On appelle primitive de f sur I toute fonction $F : I \to E$ qui est dérivable sur I et telle que $F' = f$.*

Remarque 7.2.12 *Une primitive de f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I*

Proposition 7.2.13 *F et G primitives de f sur $I \Longrightarrow \exists C \in E,\ F = C + G$*

Car $(F-G)' = 0$ et on applique 7.1.15

Théorème 7.2.14 *Soit $f : I \to E$* ***continue sur*** *I et $a \in I$. Alors l'application* $F : \begin{cases} I & \to E \\ x & \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{cases}$ *est la primitive de f qui s'annule en a, et pour toute primitive G de f,* $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$.

Car ...

Conséquence 7.2.15 *Toute fonction* ***continue sur un intervalle*** *admet des primitives sur cet intervalle.*

Conséquence 7.2.16 *Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$ et $a \in I$. Alors l'application* $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ *est dérivable sur I et $\forall x \in I$,* $\left(\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

Généralisation 7.2.17 *Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$ et $a \in I$. Soit $u : J \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle J avec $u(J) \subset I$.*
Alors $G : x \to \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et $\forall x \in J,\ G'(x) = u'(x) \times f(u(x))$

car (théorème de dérivation des fonctions composées) ...

Conséquence 7.2.18 *Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,E)$ et $a \in I$. alors $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$*

car ...

Exemple 7.2.19 *Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ t & \to \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{cases}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ exprimer $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.*

Exemple 7.2.20 *Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.*
On considère la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt$. Justifier que g est bien définie, montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, déterminer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$.

7.2.5 Intégration par partie et changement de variables

Théorème 7.2.21 ***IPP*** *Soit $\varphi : I \to \mathbb{K}$ et $u : I \to E$ avec φ et u de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*
Alors $\forall a,b \in I,\ \displaystyle\int_a^b \varphi'(t)u(t)dt = [\varphi(t)u(t)]_a^b - \int_a^b \varphi(t)u'(t)dt$.

Utilise le théorème 7.1.19 ...

Théorème 7.2.22 ***Changement de variables : Cas des fonctions continues***
Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$ et $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ avec $\varphi([\alpha,\beta]) \subset I$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(u)\varphi'(u)du$$

Car ...

Remarque 7.2.23 *Dans la pratique, on pose $t = \varphi(u)$, d'où $dt = \varphi'(u)du$. Ne pas oublier de changer les bornes d'intégration !*

Remarque 7.2.24 *La changement de variable affine $t = a + (b-a)u$ permet de transformer une intégrale sur $[a,b]$ en une intégrale sur $[0,1]$:*

$$\int_a^b f(t)dt = ... = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)u)du$$

Exercice 7.2.25 *Quel changement de variable affine simple permettrait de passer de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ à l'intégrale d'une fonction sur $[-1,1]$?*

Théorème 7.2.26 ***Changement de variables pour les fonctions continues par morceaux.***
Soit $f \in \mathcal{CM}(I,E)$, $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ et strictement monotone, telle que $\varphi(\alpha) \in I$ et $\varphi(\beta) \in I$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$$

L'hypothèse de monotonie stricte permet d'affirmer que $f\circ\varphi$ est continue par morceaux sur $[\alpha,\beta]$.
Alors ...

Exemple 7.2.27 *Cas où f est $T-$périodique. Alors* $\displaystyle\int_{a+kT}^{b+kT} f = \int_a^b f$

car ...

Exemple 7.2.28 *Cas où f est paire sur I centré en 0. Alors $\forall a \in I$,* $\displaystyle\int_{-a}^{0} f = \int_0^a f$.

Cas où f est impaire sur I centré en 0. Alors $\forall a \in I$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$

car ...

7.3 Taylor

7.3.1 Rappel du théorème des accroissements finis (TAF) : cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Théorème 7.3.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors*

$$\exists c \in]a,b[,\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Voir la démonstration dans le cours de Mpsi.

Remarque 7.3.2 *Ce théorème n'est vrai que pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ il est faux comme le prouve l'exemple suivant :*
Soit : $\begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{C} \\ t & \to e^{it} \end{cases}$. *$f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,2\pi]$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = ie^{it}$, donc $|f'(t)| = \left|ie^{it}\right| = 1$ donc $\forall t$, $f'(t) \neq 0$, alors que $f(0) - f(2\pi) = 0$. La fonction f ne vérifie donc pas la conclusion du TAF tout en en vérifiant les hypothèses sur $[0,2\pi]$..*

Remarque 7.3.3 *Rappelons que c'est ce théorème qui permet de prouver le théorème vu en première concernant les variations d'une fonction dérivable sur un intervalle I selon le signe de la dérivée.*
Rappeler ce théorème :

Théorème 7.3.4 ***Extremums locaux.***
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I, et soit $a \in \overset{\circ}{I}$

- *f admet un extremum en $a \Longrightarrow f'(a) = 0$.*

— *$f'(a) = 0$ et f' change de signe en $a \Longrightarrow f$ a un extremum local en a.*

Car ...

Théorème 7.3.5 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ telles que $|f'| \leqslant g'$ sur $]a,b[$.*
Alors $|f(b) - f(a)| \leqslant |g(b) - g(a)|$.

Car :
1er cas $a \leqslant b$. Alors $|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(t)dt \right| \leqslant \int_a^b |f'(t)|\, dt \leqslant \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a)$
Traitez le 2nd cas : $a > b$

7.3.2 Inégalité des accroissements finis : IAF

Théorème 7.3.6 *Soit $f : [a,b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que $\exists M \geqslant 0,\ \forall t \in]a,b[,\ \|f'(t)\| \leqslant M$. Alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\,|b - a|$*

Car ...

Conséquence 7.3.7 *Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tq $\exists M > 0,\ \forall t \in I,\ \|f'(t)\| \leqslant M$.*
alors f est $M-$Lipschitzienne sur I

car ...

Remarque 7.3.8 *Cette inégalité généralise aux fonctions à valeurs dans un ev de dimension finie le TAF qui n'est vrai que pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Théorème 7.3.9 *Soit $f : [a,b] \to E$ continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$* ***par morceaux*** *sur $[a,b]$ telle que $\exists M \geqslant 0,\ \forall t \in [a,b],\ \|f'(t)\| \leqslant M$. Alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant M\,|b - a|$*

i.e. IAF est encore vraie si f' est seulement continue par morceaux sur $[a,b]$
En effet ...

Théorème 7.3.10 ***Théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$***
Soit $f : [a,b] \to E$ continue sur $[a,b]$ sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
f' a une limite $\ell \in E$ en $b \Longrightarrow f$ dérivable en b et $f'(b) = \ell = \lim\limits_{x \to b} f'(x)$

Car ...

Corollaire 7.3.11 *$f : I \to E$ et $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$*
$\lim\limits_{x_0} f' = \ell \Longrightarrow f$ dérivable en x_0, $f'(x_0) = \ell$ et f' continue en x_0.

Exemple 7.3.12 *Soit $f : x \to \dfrac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.*
Montrer que f est prolongeable par continuité, et que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 7.3.13 *Il existe des fonctions $f : I \to E$ continue sur I et dérivable sur I et telles que f' n'a pas de limite en x_0, c'est à dire des fonctions dérivables sur I mais dont la dérivée n'est pas continue sur I, comme en témoigne l'exemple suivant :*

Exemple 7.3.14 $f : x \to \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}.$
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$
Montrer que f est dérivable en 0, et que f' n'a pas de limite en 0

Corollaire 7.3.15 *f de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b[$ telle que f et ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à k possèdent toutes des limites en b dans E.*
Alors f est k fois dérivable en b et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$.

7.3.3 Formules de Taylor

Théorème 7.3.16 ***Taylor avec reste intégral à l'ordre** n.*
Soit $f : [a, b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Par récurrence. À l'ordre 0 il s'agit du théorème 7.2.18. Puis intégration par partie "judicieuse".

Remarque 7.3.17 *Le terme $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ est appelé reste d'ordre n dans la formule et se note souvent R_n .*
Il mesure l'erreur commise lorsqu'on remplace $f(b)$ par $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.
ATTENTION : Ce reste peut être grand ....

Exemple 7.3.18 *On va montrer que $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$*

1. *Pour $x > 0$, appliquer (après justification) la formule de Taylor au rang 2 puis 3 à la fonction $f : t \to \ln(1 + t)$ sur $[0, x]$*
2. *En étudiant, pour $x > 0$ le signe de $R_2(x)$ et de $R_3(x)$, conclure.*

Exemple 7.3.19 *Appliquons la formule de Taylor à la fonction exp à l'ordre n sur $[0, x]$.*
$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$
Pour x fixé, $\left|\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt\right| \leqslant Max(1, e^x) \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt\right| = Max(1, e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$
Par comparaison des suites géométriques et factorielles, on déduit
$\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt\right| = 0.$
Ceci nous permet de conclure que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Conséquence 7.3.20 ***Inégalité de Taylor Lagrange***
Soit $f : [a, b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ telle que $\exists M, \forall t \in [a, b], \left\|f^{(n+1)}(t)\right\| \leqslant M$. Alors

$$\left\|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right\| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Car ...

Remarque 7.3.21 *Pour $n = 0$ on retrouve l'inégalité des accroissements finis.*

Théorème 7.3.22 ***Taylor Young : propriété locale***
Soit : $I \to E$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et soit $a \in I$, alors f a un développement limité d'ordre n au voisinage de a, i.e..
il existe une fonction ε telle que $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + h^n \varepsilon(h)$ et $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Car ...

Remarque 7.3.23 *C'est un théorème local : il n'a de sens que pour h voisin de 0, la seule chose qu'on connaît sur cette fonction ε est qu'elle a pour limite 0 en 0.*

Théorème 7.3.24 ***Intégration d'un Développement limité***
Soit $f : I \to E$ continue sur I, et soit $x_0 \in I$. On suppose que f admet un Développement Limité d'ordre n au voisinage de x_0 (noté $DL_n(x_0)$) :
$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + ... + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$ et $\lim_0 \varepsilon = 0$, avec $a_0, ..., a_n \in E$ et ε fonction à valeurs dans E.
Alors toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(x_0)$:
$F(x) = F(x_0) + a_0(x-x_0) + a_1 \frac{(x-x_0)^2}{2} + ... + a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + (x-x_0)^{n+1} \varepsilon_2(x-x_0)$ et $\lim_0 \varepsilon_2 = 0$.

Car ...

Exemple 7.3.25 *Écrire le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction Arctan.*

7.4 Arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^1$

7.4.1 Généralités

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et
E un espace vectoriel de dimension 2 ou 3 sur $\mathbb{R}$. E est muni du repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ si $n = 2$, ou $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ si $n = 3$.

Définition 7.4.1 • *On appelle arc paramétré de classe C^k ($k \geqslant 1$) sur E toute application de classe C^k définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E.*
La fonction est souvent notée $M : \left\{ \begin{array}{c} I \to E \\ t \to M(t) \end{array} \right.$
- *Le support (ou trajectoire) de l'arc paramétré est l'ensemble $M(I) = \{M(t)/t \in I\}$*
- *Un arc est dit fermé lorsque I est un segment $I = [a,b]$ et $M(a) = M(b)$.*

Définition 7.4.2 *Soit $M : I \to E$ un arc paramétré de classe C^1 sur I et soit $t_0 \in I$*
On dira que le point $M(t_0)$ est régulier si et seulement si $\overrightarrow{M'(t_0)} \neq \overrightarrow{0}$
On dira que le point $M(t_0)$ est stationnaire si et seulement si $\overrightarrow{M'(t_0)} = \overrightarrow{0}$
On dira que l'arc est régulier si tous ses points sont réguliers

7.4.2 Tangente en un point d'un arc régulier

Soit M un arc paramétré de classe C^k défini sur I ($k \geqslant 1$), et soit $t_0 \in I$.
On suppose qu'il existe un entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$ et $\overrightarrow{M^{(j)}(t_0)} \neq \vec{0}$. On note p le plus petit de ces entiers.
Notons $M_h = M(t_0 + h)$.

$$\overrightarrow{M_0M_h} = \frac{h^p}{p!}\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} + h^p\vec{\varepsilon_1}(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon_1}(h) = \vec{0} \qquad \text{(Taylor Young)}$$

Donc, pour h tendant vers 0,

$$\left\|\overrightarrow{M_0M_h}\right\| \sim \frac{|h^p|}{p!}\left\|\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}\right\|$$

et donc pour h voisin de 0, $M_0 \neq M_h$.
Alors la droite (M_0, M_h) (droite "sécante") qui a pour vecteur directeur $\dfrac{p!}{h^p}\overrightarrow{M_0M_h}$ a pour limite $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}$
La droite $M_0 + \text{Vect}\left(\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}\right)$, position limite de la droite sécante $M_0 + \text{Vect}\left(\overrightarrow{M_0M_h}\right)$ est appelée tangente à l'arc paramétré au point M_0.
D'où la définition/propriété suivante

Définition 7.4.3 *On considère un arc paramétré M de classe C^k . S'il existe un $t_0 \in I$ et si on note $p \in [[1, k]]$ le plus petit entier supérieur à 1 tel que tel que $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} \neq \vec{0}$ (si un tel entier existe), alors la tangente à l'arc paramétré au point t_0 est la droite $M_0 +$ Vect $\left(\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}\right)$.*
C'est la position limite de la sécante $M_0 +$ Vect$\left(\overrightarrow{M_0M_h}\right)$ (où $M_h = M(t_0 + h)$) quand h tend vers 0.

Proposition 7.4.4 *Si l'arc est régulier, alors la courbe admet en tout point t_0 une tangente de vecteur directeur $\overrightarrow{M'(t_0)}$*
Dans le cas où E est de dimension 2, la tangente (T) au point régulier $M(t_0)$ a pour équation

$$M(x, y) \in (T) \iff \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Définition 7.4.5 *Dans le cas où E est de dimension 2, on appelle normale à l'arc paramétré au point régulier t_0, la droite affine passant par ce point et orthogonale à la tangente en ce point.*

Chapitre 8

Suites et séries de fonctions

Contents

Dans toute ce chapitre E et F désignent deux evn de dimension finie.

8.1 Suites de fonctions

8.1.1 Convergence simple

Définition 8.1.1 *Soit $X \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions* $f_n : \begin{cases} X & \to F \\ x & \to f_n(x) \end{cases}$.
On dira que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : X \to F$ si et seulement si

$$\forall x \in X,\ \textit{la suite vectorielle } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge vers } f(x)$$

On écrira alors (f_n) CVS vers f.

Exemple 8.1.2 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit* $f_n\ : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \to \dfrac{1}{x+\dfrac{1}{n}} \end{cases}$.
Alors la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : x \to \dfrac{1}{x}$

Remarque 8.1.3 *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n sont bornées sur $\mathbb{R}_+^*$, mais la fonction limite f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.*
Donc, ***dans le cas de la convergence simple, le fait que les fonctions f_n sont toutes***

bornées sur X ne permet pas de conclure que la fonction limite sera elle aussi bornée sur X.

Exemple 8.1.4 $f_n : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \to x^n \end{cases}$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \to \begin{cases} 0 & si\ 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$

Remarque 8.1.5 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ mais la fonction limite f n'est pas continue en 1.*
Donc, ***dans le cas de la convergence simple, le fait que les fonctions f_n sont toutes continues sur X ne permet pas de conclure que la fonction limite sera elle aussi continue sur X.***

Exemple 8.1.6 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit* $f_n : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \to \begin{cases} n & si\ 0 < x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & si\ x \geqslant \dfrac{1}{n}\ ou\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n$ et $\displaystyle\int_0^1 f$. Comparer.

Remarque 8.1.7 *Donc,* ***dans le cas de la convergence simple, le fait que la suite de fonctions f_n converge vers f sur X ne permet pas de conclure que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X f_n$ serait égale à $\displaystyle\int_X f$.***

En résumé, la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) vers une fonction f n'est pas un outil efficace pour déduire des propriétés de la fonction f à partir des propriétés des fonctions f_n .

8.1.2 Convergence uniforme

Définition 8.1.8 *Soit $X \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions* $f_n : \begin{cases} X & \to F \\ x & \to f_n(x) \end{cases}$.
On dira que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction $f : X \to F$

$$\iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

$$\iff \lim_{n\to+\infty} \underset{x\in X}{Sup} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

On dit aussi que f est la limite uniforme de la suite (f_n)

Remarque 8.1.9 *(f_n) converge uniformément vers f sur $X \Longrightarrow$ la suite $(f_n - f)$ est bornée sur X.*

clair

Proposition 8.1.10 *(f_n) converge uniformément vers $f \Longrightarrow (f_n)$ converge simplement vers f.*

clair

ATTENTION : la réciproque est fausse, comme on va le voir.

Remarque 8.1.11 *Cette propriété est utile quand on veut étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions :*
- *On commence par étudier la convergence simple, pour déterminer la fonction limite*
- *On étudie alors la suite de fonctions $(f_n - f)$.*

Proposition 8.1.12 .
(f_n) converge uniformément vers $f \iff \exists(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}},\ \forall x \in X,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \alpha_n$ avec $\lim_n \alpha_n = 0$.

Car : pour le sens direct, la suite $\alpha_n = (\operatorname{Sup}_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\|)_n$ satisfait bien les conditions souhaitées.
Pour le sens réciproque, par hypothèse la suite $(\operatorname{Sup}_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\|)_n$ est une suite de réels positifs qui est majorée par la suite (α_n), donc cette suite converge vers 0. Cqfd.

Remarque 8.1.13 *Il faut bien voir que la suite $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels* ***ne dépendant pas de*** *x*

Remarque 8.1.14 *Si on trouve une suite $(x_n)_n$ de points de X pour lesquels la suite $(\|f_n(x_n) - f(x_n)\|)_n$ ne converge pas vers 0, alors on conclut que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f.*

Exemple 8.1.15 *Soit $f_n : x \to x^n$ sur $[0,1]$. Montrons que cette suite de fonctions (pourtant très simple) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.*
- *Déterminer la limite simple f de cette suite de fonctions*
- *En considérant la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f.*

Exemple 8.1.16 *Soit $f_n : x \to \dfrac{nx}{1+n^2x}$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.*

Exemple 8.1.17 *Soit $f_n : x \to \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ Montrer que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.*

Exemple 8.1.18 *Soit $f_n : x \to \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$*
- *Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f à déterminer.*
- *Étudier les variations de la fonction $f_n - f$ sur $\mathbb{R}_+$.*
- *Qu'en conclure sur la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}_+$? et sur $\mathbb{R}$?*

Exemple 8.1.19 *Soit $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ x & \to \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.*
- *Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge sur $\mathbb{R}_+$ simplement vers une fonction f à déterminer.*
- *Soit $a > 0$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$*
- *Montrer que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.*

Proposition 8.1.20 . *$\forall n$, f_n est bornée sur X et $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \Longrightarrow$ la fonction f est bornée sur X.*

Car ...

en reprenant l'exemple 8.1.2, on peut conclure par contraposée que la suite (f_n) ne convergeait pas uniformément vers f.

8.1.3 Convergence uniforme sur tout compact

Définition 8.1.21 *Soit $X \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : \begin{cases} X & \to F \\ x & \to f_n(x) \end{cases}$.*
On dira que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction $f : X \to F$ sur tout compact de X

$$\Longleftrightarrow \forall K \text{ compact de } X, \text{ la suite } (f_{n|K})_n \text{ des restrictions de } f_n \text{ à } K,$$

$$\text{converge uniformément sur } K \text{ vers la restriction de } f \text{ à } K$$

$$\Longleftrightarrow \forall K \text{ compact de } X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in K, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \underset{x\in K}{Sup} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

Remarque 8.1.22 ***Important*** *: On a vu dans l'exemple 8.1.18 qu'une fonction qui converge uniformément sur tout compact de I ne converge pas forcément uniformément sur I*

Proposition 8.1.23 *Dans le cas de fonctions définies sur $X \subset \mathbb{R}$, la convergence uniforme sur tout compact équivaut à la convergence uniforme sur tout segment inclus dans X.*

Car ...

Exemple 8.1.24 *Soit $f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \to xe^{\frac{x}{n}} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.*

- *Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_n$.*
- *Montrer que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.*
- *Montrer que cette suite de fonctions converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.*

Exemple 8.1.25 *Soit $f_n : \begin{cases}]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \to \left(\frac{x}{n}\right)^{nx} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$*

- *Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_n$.*
- *Montrer que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.*
- *Montrer que cette suite de fonctions converge uniformément sur tout compact de $]0, +\infty[$.*

8.1.4 Opérations et convergence uniforme

Théorème 8.1.26 .

$$\left.\begin{array}{l} (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X \\ (g_n)_n \text{ converge uniformément vers } g \text{ sur } X \end{array}\right\},\ \alpha, \beta \in K \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (\alpha f_n + \beta g_n)_n \text{ converge uniformément} \\ \text{vers } \alpha f + \beta g \text{ sur } X \end{array}\right.$$

car ...

MAIS $$\left.\begin{array}{l} (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X \\ (g_n)_n \text{ converge uniformément vers } g \text{ sur } X \end{array}\right\} \not\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (f_n g_n)_n \text{ converge uniformément} \\ \text{vers } fg \text{ sur } X \end{array}\right.$$

Exemple 8.1.27 *Soit* $f_n : x \to x + \dfrac{1}{n}$ *et* $g_n : x \to \dfrac{1}{n}$

- *Montrer que les suites* $(f_n)_n$ *et* $(g_n)_n$ *convergent uniformément respectivement sur* $\mathbb{R}$ *vers des fonctions* f *et* g *à déterminer.*
- *Montrer que la suite* $(f_n g_n)_n$ *ne converge pas uniformément vers* fg *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 8.1.28 *(Ce n'est pas un résultat de cours)*

$$\left.\begin{array}{c}\forall n \text{ les fonctions } f_n \text{ et } g_n \text{ sont bornées sur } X\\ (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X\\ (g_n)_n \text{ converge uniformément vers } g \text{ sur } X\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(f_n g_n)_n \text{ converge uniformément}\\ \text{vers } fg \text{ sur } X\end{array}\right.$$

Théorème 8.1.29 .

$$\left.\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X\\ (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } Y\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément}\\ \text{vers } f \text{ sur } X \cup Y\end{array}\right.$$

Car ...

Conséquence 8.1.30 .

$$\left.\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a,b[\\ \text{La suite vectorielle } (f_n(b))_n \text{ converge vers } \ell\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [a,b]\\ \text{vers } \tilde{f} : x \to \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq b\\ \ell \text{ si } x = b\end{cases}\end{array}\right.$$

Car ...
Ce théorème se prolonge clairement sous la forme

Conséquence 8.1.31 .

$$\left.\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X \setminus \{x_0\}\\ \text{La suite vectorielle } (f_n(x_0))_n \text{ converge vers } \ell\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } X\\ \text{vers } \tilde{f} : x \to \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0\\ \ell \text{ si } x = x_0\end{cases}\end{array}\right.$$

8.2 Continuité, double limite, intégrale sur un segment

8.2.1 Continuité

Théorème 8.2.1 *Soit* $X \subset E$, $a \in X$, *et* $\forall n,\ f_n : X \to F$.

$$\left.\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X\\ \forall n,\ f_n \text{ continue en } a\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continue en } a$$

car ...

Exemple 8.2.2 *Reprenons l'exemple 8.1.4, la fonction limite* f *n'étant pas continue en 1, on conclut par contraposée que la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *ne converge pas uniformément sur* $[0,1]$.

Conséquence 8.2.3 ***Importante*** *:*

$$\left.\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X\\ \forall n,\ f_n \text{ continue sur } X\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continue sur } X$$

Clair.

Théorème 8.2.4 *Cas de la convergence sur tout compact*

$$\left.\begin{array}{c} (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur tout compact de } X \\ \forall n,\ f_n \text{ continue sur } X \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continue sur } X$$

Car ...

Remarque 8.2.5 *La convergence uniforme sur tout compact de X de fonctions continues sur X suffit à prouver la continuité de la fonction limite sur l'ensemble X tout entier, mais ne prouve absolument pas la convergence uniforme sur X tout entier.*

Conséquence 8.2.6 *On suppose X compact. On sait que $\mathcal{C}(X,F) \subset \mathcal{B}(X,F)$, où $\mathcal{B}(X,F)$ est un ev normé par la norme $\|.\|_\infty$*
Alors $\mathcal{C}(X,F)$ est un fermé de $\mathcal{B}(X,F)$.

car ...

8.2.2 Interversion de limites

Le problème vient du fait suivant : considérons $f_n : \begin{cases} [0,1[& \to \mathbb{R} \\ x & \to x^n \end{cases}$.

Déterminons $\displaystyle\lim_{x\to 1\ x\neq 1}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to 1\ x\neq 1} f_n(x)\right)$.
Que constate-t-on ?
En d'autres termes on ne peut pas "changer l'ordre des limites" sans précaution ...
Dans le cas de la convergence uniforme, on dispose du théorème suivant :

Théorème 8.2.7 *Soit $X \subset E$, $a \in \overline{X}$*

$$\left.\begin{array}{l} (f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } X \\ \forall n,\ \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \ell_n \in F \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{La suite vectorielle } (\ell_n)_n \text{ converge et} \\ \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n \end{array}\right.$$

Démonstration non exigible.

Généralisation 8.2.8 ***Cas des limites infinies***

$$\left.\begin{array}{c} \forall n,\ f_n : [a,b[\to \mathbb{R} \\ (f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } [a,b[\\ \forall n,\ \lim\limits_{x\to b} f_n(x) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to b} f(x) = +\infty$$

8.2.3 Intégration d'une limite uniforme sur un segment

On a vu dans l'exemple 8.1.6 que si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers une fonction f sur $[a,b]$, rien ne permet de penser que la suite des intégrales $(\int_a^b f_n)_n$ convergerait vers $\int_a^b f$. Dans cet exemple, les fonctions n'étaient pas continues sur le segment, seulement continues par morceaux. Donnons un exemple avec des fonctions continues.

Exemple 8.2.9 *Soit f_n fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(0) = f_n(2/n) = 0$, $f_n(1/n) = n$, f_n affine sur $[0,1/n]$ et sur $[1/n,2/n]$, enfin f_n nulle sur $[2/n,1]$.*

- *Construire sa courbe représentative.*
- *Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.*

— *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 f_n$ *et* $\displaystyle\int_0^1 f$.
— *La suite* $(\displaystyle\int_0^1 f_n)_n$ *converge-t-elle vers* $\displaystyle\int_0^1 f$ *?*

Dans le cas de la convergence uniforme sur un segment, les choses s'arrangent :

Théorème 8.2.10 *Soit* $\forall n,\ f_n : [a,b] \to F$ *des fonctions continues sur* $[a,b]$.
$(f_n)_n$ *CVU vers* f *sur* $[a,b] \Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n$.

Car ...

Corollaire 8.2.11 ***Primitivation***
Soit $(\varphi_n)_n$ *une suite de fonctions définies et continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* F. *Soit* $a \in I$.
On suppose que $(\varphi_n)_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I *vers une fonction* φ.
On pose $\Phi_n : x \to \displaystyle\int_a^x \varphi_n(t)dt$ *et* $\Phi : x \to \displaystyle\int_a^x \varphi(t)dt$.
Alors, la suite $(\Phi_n)_n$ *converge simplement vers* Φ *sur* I, *et la convergence est uniforme sur tout segment de* I.

Car ...

8.2.4 Dérivation d'une suite de fonctions

Préambule : malheureusement, pour la dérivation, la CVU des fonctions à dériver ne suffit pas.

$$\left.\begin{array}{l}(f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I\\ \forall n,\ f_n \text{ dérivable sur } I\end{array}\right\} \not\Rightarrow f \text{ dérivable sur } I, \text{ comme le montre l'exemple ci dessous}$$

Exemple 8.2.12 *Soit* f_n *définie sur* $[-1,1]$ *par* $\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$.
— *Montrer que la suite* $(f_n)_n$ *CVU sur* $[-1,1]$ *vers une fonction* f *à déterminer.*
— $\forall n,\ f_n$ *est dérivable sur* $[-1,1]$. *Qu'en est-il de* f *?*

Théorème 8.2.13 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* I *à valeurs dans* F.
On suppose que $(f_n)_n$ *converge SIMPLEMENT vers une fonction* f *sur* I
On suppose que la suite des DÉRIVÉES $(f'_n)_n$ *CVU sur tout segment de* I *vers une fonction* g
Alors

1. $(f_n)_n$ *CVU vers* f *sur tout segment de* I,
2. f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I,
3. $f' = g$ *i.e.* $\left(\displaystyle\lim_n f_n\right)' = \lim_n (f'_n)$.

Car ...

Corollaire 8.2.14 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I à valeurs dans F $(p \geqslant 1)$.*
On suppose que $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $(f_n^{(k)})_n$ converge SIMPLEMENT sur I
On suppose que la suite $(f_n^{(p)})_n$ CVU sur tout segment de I vers une fonction g
Alors

1. *$f = \lim\limits_n f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et $f^{(p)} = g$,*
2. *$\forall k \in [\![1, p]\!]$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ CVU sur tout segment de I vers $f^{(k)}$.*

Car : récurrence sur p

Conséquence 8.2.15 *Soit $\forall n,\ f_n \in \mathcal{C}^\infty(I, F)$ telles que*
- *La suite $(f_n)_n$ CVS sur I,*
- *$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(f_n^{(k)})_n$ CVU sur tout segment de I*

alors, la fonction $f = \lim\limits_n f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et $\forall k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ CVU sur tout segment de I vers $f^{(k)}$.

Car ...

8.3 Convergence uniforme et normale d'une série de fonctions

Rappel Étudier la série de terme général $u_n \in E$ c'est étudier la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
De même, l'étude de la suite de terme général u_n peut se ramener à l'étude de la série télescopique de terme général $v_n = u_n - u_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ et $v_0 = u_0$.
L'étude des séries de fonctions va donc se ramener à l'étude des suites de fonctions. On va donc traduire pour les séries les résultats déjà vus pour les suites de fonctions.

8.3.1 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 8.3.1 *Soit $X \subset E$ et $\forall n,\ u_n : X \to F$ des fonctions.*
Etudier la série de fonctions $\sum u_n$ c'est d'abord déterminer l'ensemble des $x \in X$ tq la série vectorielle $\sum\limits_n u_n(x)$ converge.

Notons alors $Y = \left\{ x \in X / \sum\limits_n u_n(x)\ CV \right\}$, alors on définit la fonction $S : \begin{cases} Y & \to F \\ x & \to \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x). \end{cases}$
On dit alors que la série de fonction $\sum\limits_n u_n$ converge simplement sur Y vers la fonction S.

Le problème revient donc à étudier des séries vectorielles dépendant d'un paramètre x.

Exemple 8.3.2 *Étudions la convergence simple des séries suivantes*

1. $\sum_n z^n \qquad (z \in \mathbb{C})$
2. $\sum_n \frac{1}{1+n^2x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$
3. $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \qquad (x \in \mathbb{R})$
4. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{n} \qquad (x \in \mathbb{R})$

Définition 8.3.3 *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de X dans F. On dit que la série de fonctions $\sum_n u_n$ (aussi notée $\sum_n u_n(x)$) converge uniformément (CVU) sur X si et seulement si :*

- *$\forall x \in X, \sum_n u_n(x)$ converge*
- *la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ CVU sur X*

Conséquence 8.3.4 *La série de fonctions $\sum_n u_n$ CVU sur X si et seulement si la suite des restes (R_n) CVU vers 0*
Prouver que $\sum_n u_n(x)$ CVU sur X c'est donc aussi majorer uniformément les suites $(\|R_n(x)\|)_n$ par une suite $(\alpha_n)_n$ ne dépendant pas de x et convergeant vers 0.

Car ...

Proposition 8.3.5 *$\sum u_n$ CVU $\Longrightarrow$ la suite de fonctions $(u_n)_n$ CVU vers la fonction nulle.*

Car ...

Exemple 8.3.6 *La série $\sum x^n$ CV simplement sur $[0,1[$ mais ne converge pas uniformément sur $[0,1[$ (voir 8.1.4).*

8.3.2 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 8.3.7 *La série $\sum u_n(x)$ CV Normalement (CVN) sur X*

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall n, \text{ la fonction } u_n \text{ est bornée sur } X \\ \text{la série positive } \sum \|u_n\|_\infty \text{ converge} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists (\alpha_n)_n \text{ suite réelle tq } \underset{x\in X}{Sup} \|u_n(x)\| \leqslant \alpha_n \\ \qquad \sum \alpha_n \text{ converge} \end{cases}$$

Exemple 8.3.8 *Soit $f_n : x \to \frac{1}{n^2+x^2}$. Montrons que $\sum f_n$ Converge normalement sur $\mathbb{R}$*

Théorème 8.3.9 *CVN $\Longrightarrow$ CVU*

Car ...

Conséquence 8.3.10 *Pour prouver qu'une série CVU on commencera souvent par chercher si elle CVN. Dans l'affirmative, la CVU est assurée par ce théorème. Si la convergence n'est pas normale, il est encore possible que la série converge uniformément. Il faudra donc faire une nouvelle étude en utilisant la propriété 8.3.4*

En résumé
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{CVN} \Longrightarrow \text{CVU} \Longrightarrow \text{CVS} \\ \Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Uparrow \\ \forall x \in X,\ \displaystyle\sum_n u_n(x) \text{ converge absolument (CVA).} \end{array}}$$

Attention : toutes les réciproques sont fausses.

Exemple 8.3.11 *Soit f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$. Montrons que la série $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}_+$.*

Exemple 8.3.12 *Soit f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$*

- *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge (la série de fonctions converge simplement)*
- *Montrer en utilisant TSA que la série $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}$.*
- *Montrer que la série $\displaystyle\sum_n f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.*

Définition 8.3.13 *La série $\sum u_n(x)$ CV Normalement (CVN) sur tout compact de X*

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall K \text{ compact de } X, \forall n, \text{ la fonction } u_n \text{ est bornée sur } K \\ \text{la série positive } \sum \|u_n\|_{K,\infty} \text{ converge} \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall K \text{ compact de } X, \exists (\alpha_{K,n})_n \text{ suite réelle tq } \displaystyle\mathop{Sup}_{x\in K} \|u_n(x)\| \leqslant \alpha_{K,n} \\ \sum \alpha_{K,n} \text{ converge} \end{array} \right.$$

Théorème 8.3.14 *CVN sur tout compact $\Longrightarrow$ CVU sur tout compact.*

8.3.3 Cas des séries alternées

Ce qui suit ne constitue pas un théorème de cours, ce doit être démontré chaque fois que nécessaire. Il est néanmoins essentiel de l'avoir vu pour pouvoir l'utiliser si besoin est.

Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}_+$.
Supposons que $\forall x \in X$, la suite $(u_n(x))_n$ décroît et tend vers 0. On sait (TSA) qu'alors la série $\displaystyle\sum_n (-1)^n u_n(x)$ converge, i.e. la série de fonctions $\displaystyle\sum_n u_n$ CVS sur X. La question qui se pose alors est celle de la convergence uniforme de la série $\displaystyle\sum_n u_n$.

On sait que pour avoir CVU de la série il est nécessaire d'avoir CVU de la suite de fonctions (voir la propriété 8.3.5)
Supposons donc que la suite de fonctions $(u_n)_n$ CVU vers 0 sur X.
Le TSA nous dit que pour tout $x \in X$, le reste $R_n(x)$ d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_n (-1)^n u_n(x)$ vérifie $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|$. Or la suite u_n convergeant uniformément, on déduit que

$\forall x \in X,\ |u_{n+1}(x)| \leqslant \|u_{n+1}\|_\infty$.
Donc $\forall x \in X,\ |R_n(x)| \leqslant \|u_{n+1}\|_\infty$. Or la suite $(u_n)_n$ CVU, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_{n+1}\|_\infty = 0$ et donc la suite de fonctions $(R_n)_n$ CVU vers 0.
Finalement sous ces hypothèses on conclut que la série $\sum u_n$ CVU sur X.

8.4 Propriétés des séries de fonctions

8.4.1 Continuité et interversion des limites

Théorème 8.4.1 *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de X dans F, soit $a \in X$.*

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_n u_n \text{ converge uniformément sur } X \\ \forall n,\ u_n \text{ continue en } a \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{la fonction } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ continue en } a$$

Il suffit d'appliquer le théorème 8.2.1 à la suite de fonctions $(S_n)_n$.

Corollaire 8.4.2 .

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_n u_n \text{ converge uniformément sur } X \\ \forall n,\ u_n \text{ continue sur } X \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{la fonction } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ continue sur } X$$

Clair voir théorème 8.2.3

Corollaire 8.4.3 .

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_n u_n \text{ converge uniformément sur tout compact de } X \\ \forall n,\ u_n \text{ continue sur } X \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ continue sur } X$$

Clair voir théorème 8.2.4

Exemple 8.4.4 *Montrons que la fonction $f : x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 8.4.5 *Soit $X \subset E$, $a \in \overline{X}$ et $(u_n)_n$ une suite de fonctions de X dans F.*

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\sum_n u_n \text{ CVU sur } X \\ \forall n,\ \lim\limits_{x\to a} u_n(x) = \ell_n \in F \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{La série vectorielle } \displaystyle\sum_n \ell_n \text{ converge vers une limite } \ell \text{ et} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \text{ a pour limite } \ell \text{ quand } x \text{ tend vers } a \\ \text{i.e. } \displaystyle\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n \end{array}\right.$$

Exemple 8.4.6 *On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$*

- *Justifier que cette série converge sur $]-1,1[$. On note S sa somme.*
- *Montrer que S est continue sur $]-1,1[$*
- *Montrer que cette série converge uniformément sur $[0,1[$.*
- *Déterminer la limite de S en 1.*
- *Montrer que cette série ne converge pas uniformément sur $]-1,0]$ (on pourra s'intéresser aux limites en -1).*

Exemple 8.4.7 *On considère la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x}{n^2+x^2}$

- *Montrer que cette série CVS sur* $\mathbb{R}$
- *On va chercher si la série a une limite quand* $x \to +\infty$.
  - *Justifier :* $\displaystyle\int_n^{n+1} x\frac{dt}{t^2+x^2} \leqslant \frac{x}{n^2+x^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} x\frac{dt}{x^2+t^2}$ *pour* $x > 0$.
  - *En intégrant les membres gauche et droite de cette double inégalité, en déduire un encadrement de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$ *et conclure sur* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$
- *Le théorème sur l'interversion des limites est-il applicable quand* x *tend vers* $+\infty$ *?*

8.4.2 Intégration sur un segment

Théorème 8.4.8 *Soit* $\forall n,\ u_n : [a,b] \to F$ *des fonctions continues sur* $[a,b]$.

$$\sum_n u_n \text{ CVU sur } [a,b] \Longrightarrow \int_a^b \left(\sum_0^{+\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_0^{+\infty} \left(\int_a^b u_n(t)dt\right).$$

C'est le théorème sur les suites de fonctions.

Exemple 8.4.9 *On sait que pour* $|t| < 1$, $\displaystyle\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$ *(Rappeler pourquoi)*

- *Montrer que cette série CVU sur tout compact de* $]-1,1[$.
- *En déduire, pour* $|x| < 1$, *une écriture de* $\ln(1+x)$ *sour forme de série.*
- *Étudier la limite quand* x *tend vers 1, et conclure sur* $\ln(2)$

8.4.3 Dérivation terme à terme d'une série

Théorème 8.4.10 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de fonctions de* I *dans* F, *telle que*

- $\forall n,\ u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* I
- $\displaystyle\sum_n u'_n$ *CVU sur tout segment de* I
- $\displaystyle\sum_n u_n$ *converge simplement sur* I

alors

- $S = \displaystyle\sum_n u_n$ *CVU sur tout segment de* I,
- S *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I,
- $\forall x \in I,\ S'(x) = \displaystyle\sum_n u'_n(x)$

Clair.

Corollaire 8.4.11 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de fonctions de* I *dans* F, *telle que*

- $\forall n,\ u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur l'intervalle* I
- $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \displaystyle\sum_n u_n^{(k)}$ *CVS sur* I
- $\displaystyle\sum_n u_n^{(p)}$ *CVU sur tout segment de* I

alors

— $\forall k \in [\![0,p]\!],\ \sum_n u_n^{(k)}$ *CVU sur tout segment de I. Notons* $S = \sum_0^{+\infty} u_n$,
— *S est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I,*
— $\forall k \in [\![0,p]\!],\ \forall x \in I,\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x)$

Corollaire 8.4.12 *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de I dans F, telle que*
— *$\forall n,\ u_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle I*
— $\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_n u_n^{(k)}$ *CVU sur tout segment de I*

alors notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
— *S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et*
— $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x)$

Exemple 8.4.13 *Etude de la fonction* $\zeta : x \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ *(fonction zeta de Riemann)*
— *Ensemble de définition D*
— *Montrer que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D*
— *Montrer que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur D*

Plus de questions en TD

8.4.4 Un exemple d'application

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{A}$ est une algèbre normée de dimension finie d'élément unité 1, et $\mathcal{B}$ désigne la boule ouverte unité de $\mathcal{A}$.

Proposition 8.4.14 $\forall a \in \mathcal{A},\ \|a\| < 1 \Longrightarrow 1 - a$ *est inversible dans $\mathcal{A}$, d'inverse* $\sum_0^{+\infty} a^n$

Déjà vu Chapitre 4.4.3

Proposition 8.4.15 *L'application* $\begin{cases} \mathcal{B} & \to \mathcal{A} \\ a & \to (1-a)^{-1} \end{cases}$ *est continue sur $\mathcal{B}$*

Car ...

Théorème 8.4.16
— *Notons exp l'application* $exp : \begin{cases} \mathcal{A} & \to \mathcal{A} \\ a & \to \sum_0^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \end{cases}$. *Cette application est définie et continue sur $\mathcal{A}$*
— *Soit $a \in \mathcal{A}$.*
L'application $e_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathcal{A} \\ t & \to exp(ta) \end{cases}$ *est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et,* $e'_a = a.e_a = e_a.a$

Car ...
Plaçons nous dans le cas où $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ et où $a = 1$.

Alors $e_1 : t \to exp(t)$. On vient de voir que $exp(t)' = 1exp(t) = exp(t)$ Donc la fonction ici désignée par exp vérifie la même équation différentielle que la fonction $t \to e^t$ vue en Mpsi.
De plus, $exp(0) = 1 = e^0$. Donc exp et $t \to e^t$ vérifient la même équation différentielle du premier ordre, avec les mêmes conditions initiales, donc

Proposition 8.4.17 $\forall t \in \mathbb{R}, e^t = exp(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$

Remarque 8.4.18 *La définition de exp vue dans le théorème 8.4.16 généralise à toute algèbre normée la définition qu'on avait jusqu'à présent de la fonction exponentielle d'une variable réelle.*

On peut donc par exemple parler d'exponentielle de matrices, comme on l'avait vu auparavant.

8.5 Approximations uniformes sur un segment des fonctions d'une variable réelle

Théorème 8.5.1 ***Approximation uniforme par des fonctions en escaliers***
Soit $f : [a, b] \to F$ continue sur $[a, b]$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi_\varepsilon : [a, b] \to F$ *en escaliers tq* $\forall x \in [a, b],\ \|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)\| \leqslant \varepsilon$

Car ...

Conséquence 8.5.2 ***séquentielle***
Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], F)$, $\exists(\varphi_n)_n$ suite des fonctions en escaliers sur $[a, b]$ tq $(\varphi_n)_n$ CVU vers f sur $[a, b]$
i.e. toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers sur ce segment.

Remarque 8.5.3 *On voit à ce propos que la limite uniforme de fonctions non continues peut tout à fait être continue ...*

Théorème 8.5.4 ***Approximation par des polynômes : théorème de Weierstrass*** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue sur $[a, b]$*
Il existe une suite $(P_n)_n$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que la suite des fonctions polynomiales associées CVU vers f sur $[a, b]$

Démonstration non exigible.

Remarque 8.5.5 *Ces deux théorèmes d'approximations supposent que la fonction approximée est continue **sur un segment**.*

Exemple 8.5.6 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b x^n f(x)dx = 0$. Montrons que $f = 0$.*

- *Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_a^b Pf = 0$.*
- *En considérant la suite $(P_n)_n$ du théorème de Weierstrass, montrer que la suite de fonction $(P_n f)_n$ CVU vers f^2 sur $[a, b]$.*
- *Montrer que $\int_a^b f^2 = 0$ et conclure.*

Chapitre 9

Séries entières

Contents

9.1 Introduction et convergence

9.1.1 Définitions

Définition 9.1.1 *On appelle série entière toute série de fonctions de terme général* $a_n z^n$ *avec* $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $z \in \mathbb{C}$.
a_0 *est appelé terme constant de la série*
a_n *est appelé coefficient d'ordre* n
Si on restreint la série à $z \in \mathbb{R}$, *alors on la notera plutôt* $\sum a_n x^n$ *ou* $\sum a_n t^n$ *...*

Remarque 9.1.2 *Les sommes partielles d'une série entière sont des polynômes (fonctions polynomiales)*

Remarque 9.1.3 *Si on note* S_n *le polynôme* $S_n = \sum_0^n a_k X^k$, *alors* $S_n = S_{n-1} + a_n X^n$

Exemple 9.1.4

- $\sum \frac{z^n}{n!}$ *est une série entière, dont la somme est* e^z.
- $\sum z^n$ *est une série entière, dont la somme pour* $|z| < 1$ *est égale à* $\frac{1}{1-z}$
- $\sum b_n z^{2n}$ *est aussi une série entière, car elle peut s'écrire* $\sum_n a_n z^n$ *avec* $a_{2n} = b_n$ *et* $a_{2n+1} = 0$
- *Tout polynôme en* z *est une série entière, dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang (quel est ce rang ?)*
  $1 + 3z - 5z^3$ *est la série* $\sum a_n z^n$ *où* $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 0$, $a_3 = -5$ *et* $\forall n \geqslant 4, a_n = 0$

9.1.2 Lemme d'Abel

Théorème 9.1.5 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière.*
S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ *tel que la suite* $(a_n z_0^n)_n$ *est bornée, alors*
$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < |z_0| \Longrightarrow \sum a_n z^n$ *converge absolument.*

Car ...

Conséquence 9.1.6 — *S'il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la série* $\sum a_n z_0^n$ *converge, alors* $\forall z,\ |z| < |z_0| \Longrightarrow \sum a_n z^n$ *CVA.*
— *S'il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la série* $\sum a_n z_0^n$ *diverge, alors* $\forall z,\ |z| > |z_0| \Longrightarrow \sum a_n z^n$ *DV.*

car ...

Cas particulier 9.1.7 .
Dans le cas d'une série réelle, $\sum a_n x_0^n$ *converge* $\Longrightarrow \forall x \in]-|x_0|, |x_0|[,\ \sum a_n x^n$ *CV*

9.2 Rayon de convergence

9.2.1 Rayon de convergence

Définition-théorème 9.2.1 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière.*
On appelle rayon de convergence de cette série le nombre $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *défini par :*

$$R = Sup\{r \in \mathbb{R}_+ /\ \text{la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée }\}$$

Alors $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ *converge absolument*
$\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ *diverge grossièrement*

car ...

Remarque 9.2.2 *Si* $\sum a_n z_0^n$ *converge, alors* $R \geqslant |z_0|$

car alors, la suite $(a_n z_0^n)$ converge vers 0, donc est bornée.

Remarque 9.2.3 *Toute série entière possède un rayon de convergence.*

Exemple 9.2.4 — *Montrons que le rayon de convergence de la série* $\sum \frac{z^n}{n!}$ *est* $+\infty$
— *Quel est le rayon de convergence de la série entière* $\sum z^n$ *?*
— *Montrons que le rayon de convergence de la série* $\sum n! z^n$ *est 0*
— *Montrons que le rayon de convergence de la série* $\sum n z^n$ *est 1.*
— *Déterminons le rayon de convergence de la série* $\sum (2 + (-1)^n) z^n$
— *On a vu qu'un polynôme peut être regardé comme une série entière. Quel est alors son rayon de convergence ?*

Corollaire 9.2.5 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R.
— *La suite* $(a_n z_0^n)_n$ *est bornée* $\Longrightarrow R \geqslant |z_0|$.
— $\sum a_n z_0^n$ *ne converge pas absolument* $\Longrightarrow R \leqslant |z_0|$

Exemple 9.2.6 *Considérons la série* $\sum \sin(n) z^n$.

— *Pour* $|z| = 1$ *alors la suite* $(\sin(n)z^n)_n$ *est bornée, donc* $R \geqslant 1$.

— *Pour* $z = 1$ *la série* $\sum \sin(n)z^n$ *c'est à dire la série* $\sum \sin(n)$ *diverge : en effet la suite* $(\sin(n))_n$ *ne tend pas vers 0.*
Car supposons que $\sin(n) \to 0$ *alors vu que* $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \sin(1)\cos(n)$, *on déduit que la suite* $(\cos(n))_n$ *tend vers 0. Montrer alors la contradiction.*
Finalement le rayon de convergence de la série $\sum \sin(n)z^n$ *est* $R = 1$.

Remarque 9.2.7 *Dans la définition du rayon de convergence, le théorème nous renseigne sur les* z *tel que* $|z| \neq R$ *(il y a des inégalités strictes). Le théorème ne nous renseigne pas sur le comportement de la série en* z *lorsque* $|z| = R$.

Définition 9.2.8 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon* R. *On appelle somme de la série l'application*

$$S : \begin{cases} B(0,R) & \to \mathbb{C} \\ z & \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$$

9.2.2 Disque ouvert de convergence

Définition 9.2.9 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R.

— *On appelle disque ouvert de convergence l'ensemble* $B(0,R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$
Dans le cas réel, on parlera d'intervalle ouvert de convergence : $]-R, R[$.
$\forall z \in B(0,R), \sum a_n z^n$ *converge absolument et* $\forall z,\ |z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ *diverge*

— *Lorsque* $R \in \mathbb{R}_+^*$ *i.e. (* $0 < R < +\infty$*), l'ensemble* $\{z \in \mathbb{C} / |z| = R\}$ *est appelé cercle d'incertitude, car le théorème 9.2.1 ne donne pas d'information sur la nature de la série pour* $|z| = R$.

Exemple 9.2.10 *Étudions le comportement des séries* $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ *et* $\sum \frac{z^n}{n^2}$ *sur le cercle d'incertitude (on notera* R *le rayon de convergence).*

— *Cas de la série* $\sum z^n$ *: on sait que cette série converge si et seulement si* $|z| < 1$. *Donc* $R = 1$ *et la série diverge en tout point du cercle d'incertitude*

— *Cas de la série* $\sum \frac{z^n}{n^2}$ *: déterminer* R, *et étudier son comportement sur le cercle d'incertitude.*

— *Cas de la série* $\sum \frac{z^n}{n}$ *: déterminer* R. *Étudier le comportement de cette série pour* $z = 1$ *puis pour* $z = -1$. *(on peut démontrer mais c'est plus difficile que cette série converge sur le cercle d'incertitude, sauf pour* $z = 1$*).*

Théorème 9.2.11 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R.

— *La série converge normalement sur tout disque* ***fermé inclus*** *dans le disque ouvert de convergence : i.e.* $\forall r,\ 0 < r < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ *CVN sur* $B_f(0,r)$.

— *La série DV Grossièrement pour tout* z *tel que* $|z| > R$.

Car ...

Remarque 9.2.12 ***ATTENTION*** *: la fait que la série CVN sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence n'implique pas qu'elle convergerait normalement sur le disque ouvert de convergence : par exemple la série* $\sum z^n$ *ne CV pas normalement sur* $B(0,1)$ *(rappeler comment on le montre)*

Conséquence 9.2.13 *La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.*

Car ...

9.2.3 Détermination du rayon de convergence

Règles de comparaison.
Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Proposition 9.2.14 *Si* $\forall n,\ |a_n| \leqslant |b_n|$ *alors* $R_a \geqslant R_b$*, et plus généralement, s'il existe* $C > 0$ *tel que* $\forall n,\ |a_n| \leqslant C\,|b_n|$ *alors* $R_a \geqslant R_b$.

car ...

Proposition 9.2.15 *Si* $a_n = O(b_n)$ *alors* $R_a \geqslant R_b$.
En particulier, $a_n = o(b_n) \Longrightarrow R_a \geqslant R_b$

car ...

Proposition 9.2.16 *Si* $|a_n| \sim |b_n|$ *alors* $R_a = R_b$.

car ...

Proposition 9.2.17 *Les séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum n a_n z^n$ *ont même rayon de convergence*

car ...

Exemple 9.2.18 *Déterminons les rayons de convergence des séries :*
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) z^n$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) z^n$
- $\sum (n+(-1)^n) z^n$

Utilisation de la règle de D'Alembert

Théorème 9.2.19 ***Rappel du théorème de D'Alembert pour les séries positives :***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes strictement positifs telle que* $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \geqslant 0$
- $\ell < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ *CV*
- $\ell > 1 \Longrightarrow \sum u_n$ *Diverge Grossièrement.*

Appliquons ce théorème aux séries entières :

Théorème 9.2.20 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière telle que*

$\exists N, \forall n \geqslant N,\ a_n \neq 0$ *et* $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$

alors le rayon R *de cette série est* $R = \dfrac{1}{\ell}$ *avec la convention* $\dfrac{1}{0} = +\infty$ *et* $\dfrac{1}{+\infty} = 0$

car ...

Exemple 9.2.21 — *Déterminer le rayon* R *de la série* $\sum \dfrac{n^5 + 4n^3 - 27n + 12}{n^4 + 6n^2 - 93} z^n$

— *Plus généralement : soit* P, Q *des polynômes de* $\mathbb{C}[X]$ *non nuls. Montrer que le rayon de convergence de la série* $\sum \dfrac{P(n)}{Q(n)} z^n$ *est égal à 1.*

— *Déterminer le rayon de convergence de la série* $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{z^n}{3^n}$

Remarque 9.2.22 ***ATTENTION*** *à ne pas faire dire à ce théorème plus qu'il n'en dit :*

— *Ce théorème nous renseigne dans le cas où* $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *existe. Si cette limite n'existe pas, la série entière a quand même un rayon de convergence, mais on ne pourra pas l'obtenir par D'Alembert. (voir par exemple 9.2.6)*

— *Le fait qu'on connaisse le rayon* R *de la série ne signifie pas que* $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *aurait pour limite* $\dfrac{1}{R}$ *(voir le même exemple)*

— *Ne pas appliquer ce théorème aux séries du type* $\sum a_n z^{2n}$ *ou* $\sum a_n z^{3n+1}$ *ou ...*
En effet ce sont certes des séries entières $\sum \alpha_n z^n$ *mais avec des* α_n *qui s'annulent une infinité de fois. Par exemple* $\sum a_n z^{2n}$ *est la série entière* $\sum \alpha_n z^n$ *où* α_n *est nul si* n *est impair et* $\alpha_{2n} = a_n$*. La première hypothèse du théorème n'est donc pas satisfaite.*

Exemple 9.2.23 *Quel est le rayon de la série entière* $\sum 3^n z^{2n}$ *?*

9.2.4 Rayon de convergence et opérations algébriques

Définition 9.2.24 ***Opérations algébriques formelles***
Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières. On définit de façon formelle*

— *la somme de ces deux séries entières comme étant la série* $\sum (a_n + b_n) z^n$

— *le produit de la série* $\sum a_n z^n$ *par le scalaire* λ *comme étant la série* $\sum (\lambda a_n) z^n$

— *le produit de Cauchy de ces deux séries comme étant la série entière*

$$\sum_n \left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} \right) z^n = \sum_n \left(\sum_{q=0}^{n} a_{n-q} b_q \right) z^n$$

Théorème 9.2.25 ***Sommes et combinaisons linéaires***
Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b*. Alors*

— $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$*, la série* $\sum (\lambda a_n) z^n$ *a même rayon de convergence que* $\sum a_n z^n$*.*

— *La série somme* $\sum(a_n+b_n)z^n$ *a pour rayon de convergence* R_c *qui vérifie* $R_c \geqslant min(R_a, R_b)$.
De plus,
— $R_a \neq R_b \Longrightarrow R_c = min(R_a, R_b)$
— *Si* $R_a = R_b$ *il est possible que* $R_c > R_a = min(R_a, R_b)$
et $\forall z < min(R_a, R_b), \sum_0^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

car ...

Exemple 9.2.26 — $\sum z^n$ *et* $\sum \frac{1}{n} z^n$ *ont pour rayon 1, et leur série somme* $\sum(1 + \frac{1}{n})z^n$ *a pour rayon 1 (à justifier)*
— *Quel est la rayon des deux séries* $\sum \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\right) z^n$ *et* $\sum \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\right) z^n$ *?*
Quel est le rayon de leur série somme ?
— *Quel est la rayon des deux séries* $\sum z^n$ *et* $\sum \left(-1 + \frac{1}{2^n}\right) z^n$ *?*
Quel est le rayon de leur série somme ?

Théorème 9.2.27 ***Produit de Cauchy***
Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b.
Alors la série produit $\sum_n \left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}\right) z^n$ *a un rayon de convergence* R_c *qui vérifie*
$R_c \geqslant min(R_a, R_b)$.
Et $\forall z$ *tel que* $|z| < min(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

car ...

Remarque 9.2.28 *Contrairement à ce qui se passe pour les sommes de séries entières, on peut avoir* $R_c > min(R_a, R_b)$ *même si* $R_a \neq R_b$.

Exemple 9.2.29 *Prenons par exemple la série entière* $\sum z^n$ *de rayon 1 et la série entière* $1-z$ *(polynôme donc série entière) de rayon* $+\infty$.
— *Montrons que le produit de Cauchy de ces deux séries est la série constante égale à* 1
— *Donnons le rayon de cette série produit et comparer à* $min(R_a, R_b)$

9.3 Propriétés de la somme d'une série entière

9.3.1 Continuité

On a déjà rencontré le théorème

Théorème 9.3.1 *9.2.13 : La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.*
i.e. la fonction $z \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est continue sur* $B(0, R)$.

9.3.2 $DL_n(0)$ de la somme

Théorème 9.3.2 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme S.*
Alors pour tout entier p, la fonction S admet un $DL_p(0)$ obtenu en tronquant au rang p la série entière, i.e. :
$$\forall z,\ |z| < R \Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k + o(z^p).$$

car ...

Exemple 9.3.3 *On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ on retrouve alors le $DL_n(0)$ de exp :*
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

Exemple 9.3.4 *On sait que $\forall z,\ |z| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$. Donner alors le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1-z}$*

Théorème 9.3.5 *Si $\exists r > 0$ tel que $\forall z$ tq $|z| < r$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ alors $\forall n,\ a_n = b_n$*

C'est simplement dû à un résultat de Mpsi : unicité d'un DL.

9.3.3 Dérivabilité de la somme

Théorème 9.3.6 *Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$ ($x \in \mathbb{R}$). alors*

— *la fonction S est dérivable sur $]-R, R[$ et $\forall x \in]-R, R[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$*

— *S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et*
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-R, R[,\ S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)...(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

— *$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$ et donc, $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$*

car ...

Exemple 9.3.7 *Soit $\varphi : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Cette série entière est de rayon $+\infty$, donc φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \varphi(x)$.
Déterminer $\varphi(0)$.
Montrer que φ est la fonction exp sur $\mathbb{R}$ (autre démonstration du résultat déjà établi en ...)

9.3.4 Intégrabilité

Théorème 9.3.8 *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon* R *et de somme* S.
Alors $\forall x$ *tq* $|x| < R$, $\displaystyle\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$
i.e. $\forall x$ *tq* $|x| < R$, $\displaystyle\int_0^x \left(\sum_0^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt$

car ...

Exemple 9.3.9 *On sait que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $(Arctan\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)}$.
$|x| < 1 \Longrightarrow \left|-x^2\right| < 1$ *et donc* $(Arctan\, x)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.
Cette série entière est de rayon 1 (à justifier)
Alors, $\forall x, |x| < 1 \Longrightarrow Arctan\, x = \displaystyle\int_0^x (Arctan\, t)' dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} dt$.
Donc $\forall x$ *tq* $|x| < 1$, $Arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

9.4 Fonctions développables en séries entières sur un intervalle

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$

9.4.1 Généralités

Définition 9.4.1 *Soit* $x_0 \in I$ *et* $f : I \to \mathbb{C}$.
On dira que f *est développable en série entière (centrée) en* x_0 *si et seulement si il existe une série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$ *et* $\exists \alpha > 0$ *tq*
$\forall x \in I$, $|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$.
On utilisera l'abréviation f *est* $DSE(x_0)$ *pour dire* f *développable en série entière en* x_0. *On utilisera la même abréviation pour parler du développement en série entière de* f *en* x_0, *c'est à dire pour désigner la série entière.*

Remarque 9.4.2 *Comparons* R *et* α

Remarque 9.4.3 f *est* $DSE(x_0) \iff$ *la fonction* $h \to f(x_0 + h)$ *est* $DSE(0)$
Par la suite on s'intéressera essentiellement aux $DSE(0)$.

Exemple 9.4.4 $f : x \to \dfrac{1}{1-x}$ *est* $DSE(0)$ *car* $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Remarque 9.4.5 *$f : x \to \dfrac{1}{1-x}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mais l'écriture $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ n'est valable que pour $|x| < 1$*

Exemple 9.4.6 *On a déjà rencontré d'autres fonctions $DSE(0)$:*

— *exp qui est $DSE(0)$ sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$*

— *Arctan qui est $DSE(0)$ sur $]-1,1[$: $\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{Arctan} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$*

Proposition 9.4.7 *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière à l'origine (en 0). Alors*

— *$\exists \alpha > 0,\ f$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$.*

— *$\forall x \in]-\alpha,\alpha[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$*

Voir le théorème 9.3.6 ...

Exemple 9.4.8 *La fonction $x \to |x|$ n'est donc pas développable en série entière en 0.*

Définition 9.4.9 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ développable en série entière en 0. La série entière $\displaystyle\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelée série de Taylor (ou série de Mac Laurin) de f en 0*

Remarque 9.4.10 ***IMPORTANT*** *: dans la proposition ci-dessus, il ne s'agit pas d'une équivalence. Il existe des fonctions f $\mathcal{C}^\infty$ sur I, dont la série de Taylor a un rayon de convergence $R > 0$ mais dont la somme de la série de Taylor n'est pas égale à la fonction (sauf pour $x = 0$). voir l'exemple ci-dessous.*

Exemple 9.4.11 *Considérons $f : x \to e^{-1/x^2}$.*

— *Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, et que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.*

— *Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n}$.*

— *En déduire que $f(x) = o(x^n)$ et donc, que f admet pour tout n un $DL_n(0)$.*

— *Montrer $\exists (P_k)_k \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \neq 0,\ f^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}}$*

— *Déterminer une relation de récurrence sur les polynômes P_k et en déduire le degré d_k de P_k en fonction de k, ainsi que le coefficient dominant a_k de P_k.*

— *En déduire $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(x)$ a une limite finie à déterminer quand x tend vers 0. Qu'en conclure sur $f^{(k)}(0)$?*

— *En déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa série de Taylor en 0. Quel est le rayon de cette série de Taylor ?*

— *Quels sont les réels x tels que $f(x)$ est égal à la somme de sa série de Taylor en 0 ?*

Remarque 9.4.12 *Cette fonction possède pour tout entier n un $DL_n(0)$ mais elle n'est pas égale à la somme de sa série de Taylor (voir théorème 9.3.2)*

Proposition 9.4.13 *S'il existe, le développement en série entière centré en 0 est unique.*

car le théorème nous donne la valeur des coefficients

Proposition 9.4.14 *Soit f développable en série entière en 0 et $\sum a_n x^n$ sa série de Taylor.*
- f *paire* $\Longrightarrow \forall p,\ a_{2p+1} = 0$
- f *impaire* $\Longrightarrow \forall p,\ a_{2p} = 0$

Car (unicité du DSE(0)) ...

9.4.2 CNS pour que f soit développable en série entière en 0

Théorème 9.4.15 .

$$f \text{ développable en série entière en 0} \iff \left\{ \begin{array}{r} \exists \alpha > 0,\ f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-\alpha, \alpha[\\ \forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad \text{la suite } (R_n(x))_n \text{ définie par} \\ R_n(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \text{ CV vers } 0 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty. \end{array} \right.$$

car ...

Remarque 9.4.16 *La formule de Taylor avec reste intégrale donne :*
$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

D'où une autre écriture de ce théorème.

Théorème 9.4.17 .

$$f \text{ développable en série entière en 0} \iff \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad \exists \alpha > 0,\ f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-\alpha, \alpha[\\ \forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad \text{la suite } \left(\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}} \\ \text{CV vers } 0 \end{array} \right.$$

C'est ainsi qu'on avait démontré dans l'exemple 7.3.17 que exp est développable en série entière en 0 (sans employer alors cette formulation)

9.4.3 Obtention de développements en séries entières

9.4.3.1 Opérations

Proposition 9.4.18 *Soient f, g des fonctions développables en séries entières en 0. alors, $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{C}$), fg sont développables en séries entières en 0. Les séries entières sont obtenues par somme, produit par une constante, produit de cauchy des développements de f et de g en 0*

C'est clair : voir opérations sur les séries entières.

Ce théorème est peu utilisé dans la pratique pour obtenir le DSE(0) d'un produit de fonctions.

Proposition 9.4.19 *f développable en série entière en 0. Alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est développable en série entière en 0 et son dveloppement s'obtient en dérivant p fois celui de f.*

Clair

Proposition 9.4.20 *f développable en série entière en 0. Alors ses primitives sont développables en séries entières en 0, et leurs développements s'obtiennent en primitivant terme à terme le développement de f (attention aux constantes).*

Exemple 9.4.21 *Donner le DSE(0) des fonctions ch , sh,* $\cos$ *et* $\sin$. .

Exemple 9.4.22 $f : x \to \ln(1+x)$. *On sait que* $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t}$.
Or on connaît le développement de $x \to \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)}$ *sur* $]-1,1[$.
Montrer que $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$
Montrer que cette série CVU sur $[0,1]$. *En déduire* $\forall x \in]-1,1],\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

Tout ceci suppose qu'on connaît parfaitement les développements en séries entières des fonctions usuelles, ainsi que leur rayon de convergence.

9.4.3.2 Utilisation d'une équation différentielle

Utilisable quand on sait que f est solution d'une équation différentielle à coefficients "simples" (par exemple, polynômes en x) et que f est l'unique solution de cette équation différentielle satisfaisant certaines conditions initiales ... On cherche une série entière solution de cette équation différentielle sur un intervalle J. Dans ce cas on pourra conclure que sur cet intervalle J f a pour développement la série entière obtenue.

Exemple 9.4.23 *Cherchons un DSE(0) de la fonction* $f : x \to (1+x)^\alpha$. *Dans le cas où* $\alpha \in \mathbb{N}$ *on sait faire (dire pourquoi ...)*
Plaçons nous dans le cas où $\alpha \notin \mathbb{N}$. f *est définie sur* $I =]-1,+\infty[$.

— *pour* $x > 1$, *exprimer* $(1+x)f'(x)$ *en fonction de* $f(x)$ *On en déduit que* f *est solution d'une équation différentielle linéaire (E) à donner.*
  f *est donc l'unique solution de (E) satisfaisant* $f(0) = 1$ *(voir cours de Mpsi pour l'unicité).*

— *Cherchons une solution de (E) sous forme de série entière. Posons donc* $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *cette solution sur* $]-R,R[$. *Écrire* $(1+x)S'(x) - \alpha S(x)$ *sous forme d'une série entière. En déduire que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} + na_n - \alpha a_n)x^n = 0$

— *En déduire une relation de récurrence liant les termes de la suite* $(a_n)_n$, *conjecturer alors l'expression de* a_n *en fonction de* n *et de* a_0.

— *Déterminer le rayon de convergence de cette série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *et conclure sur le DSE(0) de* $(1+x)^\alpha$

9.4.3.3 Cas des fractions rationnelles

Remarque 9.4.24 *Si* f *est une fonction rationnelle ayant pour pôle 0, alors* f *n'est pas prolongeable par continuité en 0, donc n'est pas développable en série entière en 0. Dans toute la suite on supposera donc que* f *n'a pas pour pôle 0.*

1er cas : f a un unique pôle (non nul).
Soit $u \neq 0$ et $f_1 : x \to \dfrac{1}{x-u} = \dfrac{1}{u(\frac{x}{u}-1)} = -\dfrac{1}{u}\dfrac{1}{1-\frac{x}{u}}$

f_1 est développable en série entière en 0 pour $\left|\frac{x}{u}\right| < 1$ i.e. sur $B(0, |u|)$.

Alors pour $|x| < |u|$, $f(x) = -\frac{1}{u}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{u}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{u^{n+1}}x^n$.

Soit $f_p : x \to \frac{1}{(x-u)^p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Par produit de fonctions développables en séries entières en 0, on sait que f_p est développable en série entière en 0 sur $]-|u|, |u|[$. Mais utiliser le produit de Cauchy de séries pour obtenir ce développement est trop lourd, inenvisageable (sauf peut-être pour $p = 2$).

En dérivant $p-1$ fois la fonction f_1 on obtient : $f_1^{(p-1)}(x) = \frac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{(x-u)^p}$ et donc

$f_p(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}f_1^{(p-1)}(x)$.

En dérivant $p-1$ fois le développement de f_1 on obtiendra donc le développement de f_p.

On aurait pu aussi écrire $f_p(x) = \frac{(-1)^p}{u^p}\left(1-\frac{x}{u}\right)^{-p}$ et utiliser le développement de $(1+x)^\alpha$.

2nd cas : f a plusieurs pôles non nuls

f a pour pôles $u_1, ..., u_r$. Les éléments simples correspondant au pôle u_k sont développables en séries entières sur $]-|u_k|, |u_k|[$ (vu au dessus).

Notons alors $R = min\{|u_k| / k \in [\![1, r]\!]\}$, on déduit le

Théorème 9.4.25 *Toute fonction rationnelle f n'ayant pas pour pôle 0 est développable en série entière en 0 sur $]-R, R[$ où $R = min\{|u_k| / u_k$ décrit l'ensemble des pôles de $f\}$*

Exemple 9.4.26 *Soit $f : x \to \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$.*

- *Décomposons f en éléments simples.*
- *Donner le développement en série entière de chacun des éléments simples ainsi que l'intervalle de validité, et en déduire le développement de f sur un intervalle à préciser.*

  On doit trouver $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1+\frac{n+3}{2^{n+2}}\right)x^n$.

9.4.4 Quelques applications des DSE

Montrer qu'une fonction est $\mathcal{C}^\infty$

Exemple 9.4.27 *Montrer que la fonction $f : x \to \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

- *Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que f est continue en 0.*
- *Montrer que f est dérivable en 0, de dérivée continue en 0. On en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$*
- *Montrer que f est deux fois dérivable en 0, de dérivée continue en 0. On en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Mais cette démarche est vraiment lourde, et on ne voit pas comment la poursuivre pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
- *Par opérations sur les séries, montrer que pour $x \neq 0$, $f(x)$ s'écrit comme somme d'une série entière. Vérifier que cette égalité est encore vraie pour $x = 0$.*

  On en conclut que f est développable en série entière en 0. Sur quel intervalle ? Donner la valeur de $f^{(p)}(0)$ et retrouver la valeur de $f'(0)$ et celle de $f''(0)$ obtenue au-dessus.
- *Conclure.*

Exemple 9.4.28 *Généralisons l'exemple du dessus :*

Soit f développable en série entière en O et soit $\varphi : x \to \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & si\ x \neq 0 \\ f'(0) & si\ x = 0 \end{cases}$

En reprenant la démarche de la 4ème question ci dessus, montrer que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I centré en 0.

Calcul des valeurs de certaines séries numériques

Exemple 9.4.29 *Donner la valeur de* $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$.

Justifier la convergence de cette série.

On introduit la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

Après avoir fait le lien entre A et S, donner la valeur de A.

Détermination d'une solution particulière d'une équation différentielle Il s'agit ici de reprendre la démarche initiée en 9.4.3.2, dans le but de trouver une solution particulière d'une équation différentielle. Étape indispensable, comme on le verra plus tard, pour la résolution de cette équa. diff.

Exemple 9.4.30 *On va déterminer s'il existe une solution développable en série entière en 0 solution de l'équation différentielle (E) :* $y'' + xy' + y = 0$

— *Montrer que si* $x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est solution de (E) sur un intervalle* $]-R, R[$*, alors* $\forall n \geqslant 0,\ a_n + (n+2)a_{n+2} = 0$

— *Exprimer a_{2p} en fonction de a_0 et a_{2p+1} en fonction de a_1.*

— *Montrer qu'il existe une solution développable en série entière de (E) vérifiant $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.*

— *Reconnaître cette solution particulière, et donner l'intervalle sur lequel cette fonction est solution.*

Chapitre 10

Espaces préhilbertiens réels

Contents

10.1 Produit scalaire sur un espace vectoriel réel

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre sont des espaces vectoriels réels.

10.1.1 Produit scalaire

Définition 10.1.1 *Un produit scalaire sur l'espace vectoriel E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Bilinéaire :* $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R},\ \forall x, x_1, x_2, y_1, y_2, y \in E, \begin{cases} \varphi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \varphi(x_1, y) + \alpha_2 \varphi(x_2, y) \\ \varphi(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 \varphi(x, y_1) + \beta_2 \varphi(x, y_2) \end{cases}$
2. *Symétrique :* $\forall x, y \in E,\ \varphi(y, x) = \varphi(x, y)$.
3. *Définie positive :* $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geqslant 0$ *et* $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Remarque 10.1.2 *Alors,* $\forall x \neq 0,\ \varphi(x, x) > 0$.

Proposition 10.1.3 $\forall x \in E,\ \varphi(x, 0) = \varphi(0, x) = 0$ *et donc* $\varphi(0, 0) = 0$

car ...

Notation 10.1.4 *Les notations usuelles pour représenter un produit scalaire sont :* $(x|y)$, *ou* $< x, y >$ *ou* $x \cdot y$ *ou ...*
Dans ce cours j'utiliserai essentiellement la notation $< x, y >$.

Proposition 10.1.5 .
$\forall(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{R}^n,\ \forall(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant p}\in\mathbb{R}^p,\ \forall(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in E^k,\ \forall(y_j)_{1\leqslant j\leqslant p}\in E^p,$
$<\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k,\sum_{j=1}^{p}\mu_j y_j>=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_k\mu_j<x_k,y_j>$

car ...

Exemple 10.1.6 — *Sur* $\mathbb{R}^n$*, le produit scalaire usuel :*
$\forall x=(x_1,...,x_n),\forall y=(y_1,...,y_n),\ <x,y>=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k$*. Vérifions qu'il s'agit bien d'un produit scalaire .*

— *Sur* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *avec* $a<b$*,* $<f,g>=\int_a^b fg$*. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire .*
— *Sur* $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$*,* $<f,g>=\int_a^b fg$*. Est-ce un produit scalaire ?*
— *Sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*,* $<A,B>=\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{AB})$*. Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire .*
— *E est l'ensemble des suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telles que* $\sum u_n^2$ *converge.*
Montrer que E et un espace vectoriel (déjà vu) noté $\ell^2(\mathbb{R})$ *et que l'application* $\varphi:(u,v)\to\sum_{n=0}^{+\infty}u_n v_n$ *est un produit scalaire .*

Définition 10.1.7 *Un espace préhilbertien réel est un* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel muni d'un produit scalaire .*
Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

10.1.2 Norme et distance euclidienne

Théorème 10.1.8 ***Inégalité de Cauchy-Schwarz****. E un espace préhilbertien réel. Alors*
$\forall x,y\in E,\ |<x,y>|\leqslant\sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}$
Il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.

En effet ...

Définition-théorème 10.1.9 *L'application* $x\to\sqrt{<x,x>}$ *est une norme appelée norme euclidienne associée au produit scalaire* $<.>$*.*

car ...

Conséquence 10.1.10 *L'application* $\begin{cases}E\times E & \to\mathbb{R}\\(x,y) & \to<x,y>\end{cases}$ *est continue*

Déjà vu au 6.3.44

Exemple 10.1.11 *Reprenons les exemples 10.1.6*

1. *Sur* $\mathbb{R}^n$*,* $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=0}^{n}x_k^2}$

2. *Sur* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$
3. *Sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}\mathrm{A})}$
4. *Sur* $\ell^2(\mathbb{R}),\ \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2}$

Conséquence 10.1.12 *Soit E un espace préhilbertien réel, $A \subset E$ et $x \in E$. La distance euclidienne de x à A est :* $d(x,A) = Inf\left\{\|x-y\| / y \in A\right\}$

10.1.3 Propriétés algébriques

Proposition 10.1.13 $\forall x,y \in E, \begin{cases} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x,y > \\ \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x,y > \\ < x+y, x-y >= \|x\|^2 - \|y\|^2 \end{cases}$

car ...

Proposition 10.1.14 ***Identité de polarisation :***
$\forall x,y \in E,\ < x,y >= \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$

car ...

Proposition 10.1.15 ***Identité du parallélogramme :***
$\forall x,y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

10.2 Orthogonalité

Dans tout ce chapitre, E est un espace préhilbertien réel .

10.2.1 Orthogonalité

Définition 10.2.1 *Soit $x,y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux si et seulement si $< x,y >= 0$. On note $x \perp y$.*

Remarque 10.2.2 *Cette définition est symétrique :* $x \perp y \iff y \perp x$

Proposition 10.2.3 Théorème de Pythagore :
Soit $x,y \in E$. $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Proposition 10.2.4 *Le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est le vecteur nul, i.e. :*
$\forall a \in E,\ (\forall x \in E, a \perp x) \Longrightarrow a = 0.$

car ...

Définition 10.2.5 *Soit $A \subset E$. On note $A^\perp = \{y \in E / \forall a \in A, y \perp a\} = \{y \in E / \forall a \in A, < a,y >= 0\}$. Cet ensemble s'appelle l'orthogonal de A.*

Proposition 10.2.6 $\forall A \subset E,\ A^\perp$ *est un sev de E.*

car ...

Cas particulier 10.2.7 $\{0\}^{\perp} = E$ *et* $E^{\perp} = \{0\}$

car ...

Définition 10.2.8 $A, B \in \mathcal{P}(E)$. *On dira que* A *et* B *sont orthogonaux si et seulement si* $\forall a \in A, \forall b \in B,\ a \perp b$. *On note* $A \perp B$.

Proposition 10.2.9 A *et* B *orthogonaux* $\iff \begin{cases} B \subset A^{\perp} \\ A \subset B^{\perp} \end{cases}$

car ...

Proposition 10.2.10
— $A \subset B \Longrightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$
— $A^{\perp} = (Vect(A))^{\perp}$
— $A \subset A^{\perp\perp}$

car ...

Exercice 10.2.11 *Montrer que* $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.
En déduire pour A *et* B *sev de* E *que* $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$
Montrer que $(A \cap B)^{\perp} \supset A^{\perp} + B^{\perp}$

Exemple 10.2.12 *Montrer que* $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$

Remarque 10.2.13 *Il n'y a pas nécessairement égalité dans* $A \subset A^{\perp\perp}$.

Pour s'en convaincre, il suffit de choisir une partie A qui n'est pas un sev. Or on sait que $A^{\perp}$ est un sev, et donc aussi $A^{\perp\perp}$
Il n'y a pas nécessairement égalité dans $A \subset A^{\perp\perp}$ même dans le cas où A est un sev.

Exercice 10.2.14 *Soit* $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *muni du produit scalaire* $< f, g >= \int_0^1 fg$. *On considère* F *l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur* $[0,1]$.

1. *Soit* $f \in F^{\perp}$. *Justifier l'existence d'une suite* $(\varphi_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim \|\varphi_n - f\|_{\infty} = 0$.
2. *Montrer que* $\lim_{n\to+\infty} \left| \int_0^1 (f\varphi_n - f^2) \right| = 0$. *Qu'en conclure sur* f *?*
3. *En déduire* $F^{\perp}$, *puis* $F^{\perp\perp}$
4. *Conclure*

10.2.2 Orthogonal d'un sous-espace

Proposition 10.2.15 *Si* F *est un sev de* E *alors* $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

clair

Proposition 10.2.16 $F_1, ..., F_p$ *des sev orthogonaux deux à deux.*
Alors la somme $F_1 + ... + F_p$ *est directe. On parle alors de somme directe orthogonale et on la note* $F_1 \overset{\perp}{\oplus} + ... + \overset{\perp}{\oplus} F_p$

Rappeler ce que veut dire "la somme est directe".
Montrons alors la propriété.

10.2.3 Familles orthogonales

Définition 10.2.17 *Une famille $F = (e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est orthogonale si et seulement si $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Longrightarrow e_i \perp e_j$.*
Une famille $F = (e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est orthonormale si et seulement si elle est orthogonale et $\forall i \in I, \|e_i\| = 1$.

Proposition 10.2.18 *Une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre. En particulier une famille orthonormale est libre.*

car ...

Exemple 10.2.19 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n : t \to \cos(nt)$ et $s_n : t \to \sin(nt)$.*
Posons $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $S = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Montrons que $C \cup S$ est orthogonale dans $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f, g >= \displaystyle\int_0^{2\pi} fg$.

Proposition 10.2.20 *$(u_1, ..., u_p)$ une famille orthogonale. Alors $\|u_1 + ... + u_p\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2$*

car ...

10.2.4 Bases orthonormales (ou orthonormées)

Définition 10.2.21 *On dira qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormée si et seulement si :*
- *C'est une base*
- *Cette famille est orthogonale*
- *Chacun de ses vecteurs est normé.*

Cette définition appelle 2 questions :
Existe-t-il de telles bases ?
Quel est l'intérêt de telles bases ?

Proposition 10.2.22 *Si $dim(E) = n$ et $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E, pour $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, alors $< x, y >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$*

car ...
Travailler dans une base orthonormée, nous ramène au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 10.2.23 ***Procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt.***
Soit E un espace préhilbertien réel et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille libre de E.
Alors il existe une unique famille orthonormale $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que
$\forall j,\ Vect(u_1, ..., u_j) = Vect(e_1, ..., e_j)$ et $\forall j,\ < e_j, u_j >> 0$.

Démonstration constructive :

Remarque 10.2.24 *La famille ainsi construite dépend de l'ordre dans lequel on a écrit les vecteurs u_k.*

Conséquence 10.2.25 *Tout espace vectoriel euclidien (préhilbertien réel de dimension finie) possède une base orthonormée.*

Exemple 10.2.26 *$E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour $P, Q \in E$ on pose $< P, Q >= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} PQ$.*
Justifier que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.
Construire une base orthonormée de E à partir de la base canonique $(1, X, X^2)$.

Exemple 10.2.27 *$E = \mathbb{R}_2[X]$.*
Pour $P, Q \in E$ on pose $< P, Q >= P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.
Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.
Construire une base orthonormée de E à partir de la base canonique $(1, X, X^2)$.

10.2.5 Coordonnées dans une base orthonormée

On vient de voir que dans une base orthonormée, le produit scalaire se ramène au produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. Encore faut-il trouver les coordonnées d'un vecteur quelconque dans la base orthonormée.

Théorème 10.2.28 *Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et soit $x \in E$.*
Alors les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ sont les $< x, e_k >$ i.e. $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$.

car ...
On obtient donc facilement ces coordonnées sans passer par la formule $X = PX'$ qui nécessiterait le calcul de P^{-1}.

Conséquence 10.2.29 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.*
$\forall x, y \in E,\ < x, y >= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k >< y, e_k >$ *et* $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2$

Remarque 10.2.30 ***Importante*** *Si X et Y sont les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs x et y dans une base orthonormée, alors*
$< x, y >= {}^tX.Y$ *et* $\|x\|^2 = {}^tX.X$

10.3 Projections orthogonales sur un sev de dimension finie

10.3.1 Généralités

On a vu que si E est un espace préhilbertien réel et F un sev de E, alors F et $F^{\perp}$ ne sont pas nécessairement supplémentaires , ce qui pose un problème pour définir la projection orthogonale sur F.
Dans toute la suite on va se limiter au cas où F est de dimension finie.

Théorème 10.3.1 *E un espace préhilbertien réel et F* ***un sev de*** *E* ***avec*** *F* ***de dimension finie****.*
Alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires : $E = F \oplus F^{\perp}$

Car ...

Remarque 10.3.2 *On vient de voir que si $F = Vect(e_1, ..., e_n)$ où $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de F alors*
$\forall x \in E,\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k + z$ *avec $z \in F^{\perp}$ et cette écriture est unique.*

Conséquence 10.3.3 *F de dimension finie $\Longrightarrow F^{\perp\perp} = F$*

10.3.2 Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Définition 10.3.4 *E ev préhilbertien réel, F sev de dimension finie de E.*
La projection sur F de direction $F^{\perp}$ est appelée projection orthogonale sur F

Théorème 10.3.5 *E ev préhilbertien réel, F sev de dimension finie de E avec $(e_1, ..., e_n)$ base orthonormée de F.*
La projection orthogonale p sur F est caractérisée par : $\forall x \in E,\ p(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$.

Voir Remarque 10.3.2

Exemple 10.3.6 *Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π périodiques. On le munit du produit scalaire $< f, g >= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} fg$*
Vérifier qu'on a bien ainsi défini un produit scalaire sur E.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $e_k : x \to \cos(kx)$. Montrer que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée sur E.
Soit f la fonction définie par $\forall x \in [0, \pi],\ f(x) = x$ et f paire et 2π périodique. Vérifier que f est bien définie et est élément de E.
On pose $F = Vect(e_1, ..., e_n)$. Déterminer la projection orthogonale de f sur F.

Théorème 10.3.7 *E ev préhilbertien réel, F sev de dimension finie de E, on note p_F la projection orthogonale sur F. Soit $a \in E$. Alors*
- *$\forall y \in F,\ \|a - y\| \geqslant \|a - p_F(a)\|$*
- *il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si $y = p_F(a)$.*
- *$d(a, F) = \|a - p_F(a)\|$*

$d(a, F^{\perp}) = \|p_F(a)\|$
et (Pythagore) $\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + \|a - p_F(a)\|^2$

car ...
Interprétation géométrique :

Conséquence 10.3.8 ***Inégalités de Bessel*** *: Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille orthonormale de E et $x \in E$.*
alors $\|x\|^2 \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2$

Exemple 10.3.9 *Distance d'un vecteur à l'orthogonal d'une droite (hyperplan).*
Soit $a \neq 0$ et $F = Vect(a)$. $dim(F) = 1$ et donc $F \oplus F^{\perp} = E$ (voir thm 10.3.1)
Soit $x \in E$. On sait que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ et $d(x, F^{\perp}) = \|p_F(x)\|$.
Soit $e_1 = \dfrac{a}{\|a\|}$. (e_1) est une base orthonormée de $F \Longrightarrow p_F(x) =< x, e_1 > e_1 = \dfrac{< x, a >}{\|a\|^2} a$.
D'où : si $F = Vect(a)$ et $x \in E$, alors $d(x, F^{\perp}) = \dfrac{|< x, a >|}{\|a\|}$.

Exemple 10.3.10 *Déterminons le minimum de $\displaystyle\int_0^1 (t^3 - at - b)^2 dt$ quand (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$.*

Notons $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f, g >= \displaystyle\int_0^1 fg$. Soit $F = Vect(1, t)$. F est

de dimension 2. Soit, enfin, $\varphi : t \to t^3$.
La question revient à déterminer $p_F(\varphi)$*, ce qui donnera* a *et* b *et donc ensuite le minimum sera* $\|\varphi - p_F(\varphi)\|^2$.

— *1ère méthode : trouver par Gramm-Schmidt une base orthonormée* (e_1, e_2) *de* F*. Alors* $p_F(\varphi) = < \varphi, e_1 > e_1 + < \varphi, e_2 > e_2$*. On en déduit ensuite* a *et* b*.*
  Mettre en oeuvre cette méthode.
— *2nde méthode : on cherche* a *et* b *tels que* $\varphi - p_F(\varphi) \in F^\perp$*, c'est à dire chercher* a *et* b *tels que* $< t^3 - at - b, 1 >= 0$ *et* $< t^3 - at - b, t >= 0$*.*
  Mettre en oeuvre cette seconde méthode.

10.3.3 Projections orthogonales

Définition-théorème 10.3.11 *Soit* p *un projecteur.*

On dira que p *est un projecteur orthogonal* $\iff Im(p) = Ker(p)^\perp$
$$\iff Ker(p) = Im(p)^\perp$$
$$\iff Im(p) \perp Ker(p)$$

car ....

Théorème 10.3.12 *Soit* p *un projecteur.*

p *est un projecteur orthogonal* $\iff \forall x, y \in E,\ < p(x), y >=< x, p(y) >$
$$\iff \forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

car ...

10.3.4 Matrice d'une projection

Soit E espace vectoriel euclidien (donc de dimension finie) et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit F un sev de E. Comment trouver la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_F sur F.

— 1ère méthode : on détermine $(e_1, ..., e_r)$ une base orthonormée de F.
  Alors $\forall x \in E,\ p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} < x, e_k > e_k$.
— 2nde méthode : Pour $x \in E$. $y = p_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ y - x \in F^\perp \end{cases}$

Exemple 10.3.13 *Dans* $\mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire usuel. Soit* $\varepsilon_1 = (1, 0, 1, 1)$ *et* $\varepsilon_2 = (0, 1, 1, 0)$*. Soit* $F = Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$*. Donner la matrice de* p_F *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^4$*. On mettra en oeuvre les deux méthodes.*

10.4 Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel

10.4.1 Suites totales

Définition 10.4.1 *Soit* $(e_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *où* E *est un evn.*
On dit que cette suite est totale $\iff$ *l'espace* $Vect((e_k)_{k\in\mathbb{N}})$ *est dense dans* E*.*
$\iff \forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y$ *combinaison linéaire finie de vecteurs de* $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tq* $\|y - x\| \leqslant \varepsilon$
$\iff \forall x \in E,$ *il existe* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suite de vecteurs de* $Vect((e_k)_{k\in\mathbb{N}})$ *qui converge vers* x*.*

Remarque 10.4.2 *Cette définition s'applique à tout espace vectoriel muni d'une norme. Dans le cas d'un espace préhilbertien réel, la norme utilisée est la norme euclidienne.*

Proposition 10.4.3 *E un espace préhilbertien réel.*
$(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est une suite totale de vecteurs de* $E \Longrightarrow Vect((e_k)_{k\in\mathbb{N}})^{\perp} = \{0\}$.

car ...

Proposition 10.4.4 *Si E est euclidien, une suite totale est génératrice.*

10.4.2 Suite orthonormale totale

Définition 10.4.5 *Soit E un espace préhilbertien réel.*
Une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale si et seulement si c'est une famille orthonormale et elle est totale.

Théorème 10.4.6 *Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la projection orthogonale sur $Vect(e_0, ..., e_n)$.*
La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale si et seulement si $\forall x \in E$, la suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Car ...

10.4.3 Exemples de suites de polynômes orthogonaux

Proposition 10.4.7 *(Hors programme)*
Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et soit $\varphi \in E$ avec φ positive et ne s'annulant qu'en un nombre fini de points de $[a,b]$.
On pose pour f, g dans E, $< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)\varphi(t)dt$. Alors

- *$<,>$ est un produit scalaire sur E*
- *Il existe 1 et 1 seule suite de polynômes (P_n) de polynômes unitaires, orthogonaux 2 à 2 et tq $\forall n,\ deg(P_n) = n$.*

On les appelle polynômes orthogonaux associés à φ.

car ...

Remarque 10.4.8 $Vect((P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est l'ensemble des fonctions polynomiales sur* $[a,b]$.

Exemple 10.4.9 *Polynômes de Legendre : $a = -1,\ b = 1,\ \varphi = 1$. Alors la famille $\Phi_n : t \to \dfrac{d^n}{dt^n}((t^2-1)^n)$ est famille orthogonale. Voir TD*

Théorème 10.4.10 *Une suite de polynômes orthogonaux sur $[a,b]$ est totale dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.*

Car ...

Chapitre 11

Endomorphismes des espaces euclidiens

Contents

Dans toute la suite E désignera un espace vectoriel euclidien de dimension n.

11.1 Isométries vectorielles

11.1.1 Groupe orthogonal

Définition 11.1.1 *Soit $u \in L(E)$.*
On dira que u est un automorphisme orthogonal (on dit aussi isométrie vectorielle) de E si et seulement si u conserve la norme, i.e. $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.
L'ensemble des isométries vectorielles se note $\mathcal{O}(E)$.

Proposition 11.1.2 *Un automorphisme orthogonal est bien un automorphisme ...*

Car $x \in Ker(u) \Longrightarrow u(x) = 0 \Longrightarrow \|u(x)\| = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Théorème 11.1.3 *Soit $u \in L(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$u \in \mathcal{O}(E)$, i.e. u conserve la norme*
2. *u conserve le produit scalaire , i.e. $\forall x, y \in E,\ < u(x), u(y) >=< x, y >$.*
3. *L'image par u de toute base orthonormale est une base orthonormale*
4. *Il existe $\mathcal{B}$ base orthormale de E dont l'image par u est une base orthonormale*
5. *Il existe $\mathcal{B}$ base orthormale de E tq si $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ alors ${}^tA.A = I_n$.*
6. *Il existe $\mathcal{B}$ base orthormale de E tq si $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ alors $A.{}^tA = I_n$.*

car ...

Proposition 11.1.4 *1. $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé groupe orthogonal.*

2. $\forall u \in \mathcal{O}(E),\ |det(u)| = 1$.
3. *$SO(E) = \{u \in \mathcal{O}(E)/det(u) = 1\}$ est un sous groupe de $\mathcal{O}(E)$ appelé groupe spécial orthogonal, ou groupe des rotations vectorielles de E. Cet ensemble se note aussi $\mathcal{O}^+(E)$*

Car ...

Notation 11.1.5 *L'ensemble $\mathcal{O}(E) \setminus SO(E)$ se note $\mathcal{O}^-(E) = \{u \in \mathcal{O}(E)/det(u) = -1\}$*

Exemple 11.1.6 *Soit F un sev de E. On sait que $E = F \oplus F^\perp$.
Soit s la symétrie orthogonale par rapport à F. Alors $s \in \mathcal{O}(E)$.*

Car ...

Exemple 11.1.7 *Soit F un sev de E distinct de E. On sait que $E = F \oplus F^\perp$.
Soit p la projection orthogonale sur F. Alors $p \notin \mathcal{O}(E)$, car p n'est pas bijective.*

Exemple 11.1.8 *$Dim(E) = 2$ et soit $\mathcal{B} = (i, j)$ une base orthonormée de E.
Soit $u \in L(E)$ tq $\exists \theta \in \mathbb{R},\ Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Alors $u \in SO(E)$ car ...*

11.1.2 Matrices orthogonales

Définition-théorème 11.1.9 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dira que A est une matrice orthogonale si et seulement si A vérifie une des propriétés ci-dessous équivalentes :*

1. $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* ${}^tA = A^{-1}$.
2. $A.{}^tA = I_n$
3. ${}^tA.A = I_n$
4. ${}^tA$ *est orthogonale*
5. *Les colonnes de A forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire usuel.*
6. *Les lignes de A forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire usuel.*

L'ensemble des matrices orthogonales de taille n se note $\mathcal{O}(n)$.

car ...

Proposition 11.1.10 *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soit $u \in L(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.*

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff A \in \mathcal{O}(n)$$

car ...

Exemple 11.1.11 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle orthogonale ?*

Exemple 11.1.12 *Soit $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 & a \\ 0 & 1/3 & b \\ -1/\sqrt{2} & 2/3 & c \end{pmatrix}$. Déterminer a, b, c en sorte que $B \in \mathcal{O}(3)$*

Proposition 11.1.13 *1. $\mathcal{O}(n)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.*

2. $A \in \mathcal{O}(n) \Longrightarrow |det(A)| = 1$. *(Réciproque fausse)*
3. $SO(n) = \{A \in \mathcal{O}(n)/det(A) = 1\}$ *est un sous-groupe de* $\mathcal{O}(n)$ *; il est appelé groupe spécial orthogonal d'ordre* n*. Cet ensemble se note aussi* $\mathcal{O}^+(n)$.
   L'ensemble $\mathcal{O}(n) \setminus SO(n)$ *se note* $\mathcal{O}^-(n) = \{A \in \mathcal{O}(n)/det(A) = -1\}$

Car ...

Proposition 11.1.14 *Soit* $\mathcal{B}$ *une base orthonormale de* E*, et soit* $\mathcal{B}'$ *une base de* E*.*
Soit P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$*.*

$$\mathcal{B}' \text{ est orthonormale} \iff P \in \mathcal{O}(n)$$

car ...

Remarque 11.1.15 *Soit* M *inversible, alors* $M^{-1} = \dfrac{1}{det(M)}\,{}^t\!(com(M))$.
Donc, $M \in \mathcal{O}(n) \iff {}^tM = \dfrac{1}{det(M)}\,{}^t\!(com(M)) \iff M = \dfrac{com(M)}{det(M)}$

Donc $M \in SO(n) \iff \begin{cases} \text{ses colonnes forment une base orthonormale de } \mathbb{R}^n \text{ pour le produit scalaire usuel de } \mathbb{R}^n \\ \text{un de ses coefficients non nuls est égal à son cofacteur} \end{cases}$

Exemple 11.1.16 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$*. Dire si* A *est dans* $SO(3)$*.*

11.1.3 Orientation de E

Définition 11.1.17 *Orienter* E *c'est choisir (fixer) une base orthonormale* $\mathcal{B}_0$*, qu'on appellera directe.*

Définition 11.1.18 *Une orientation de l'espace étant fixée (par la donnée de* $\mathcal{B}_0$*).*
Soit $\mathcal{B}'$ *une base orthonormale, et* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}_0$ *à* $\mathcal{B}'$*. On dira que* $\mathcal{B}'$ *est directe si et seulement si* $P \in SO(n)$*. Sinon, on dira que* $\mathcal{B}'$ *est indirecte.*

Proposition 11.1.19 *Une orientation de l'espace étant fixée (par la donnée de* $\mathcal{B}_0$*).*
Soit $\mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{B}''$ *deux bases orthonormales ; soit* P *la matrice de passage de* $\mathcal{B}'$ *à* $\mathcal{B}''$*.*
$\mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{B}''$ *ont la même orientation si et seulement si* $P \in SO(n)$*.*

car ...

11.1.4 Stabilité et orthogonalité

Théorème 11.1.20 *Soit* $u \in \mathcal{O}(E)$*. Alors* $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$ *et les sev propres sont orthogonaux*

car ...

Conséquence 11.1.21 *Soit* $u \in \mathcal{O}(E)$*.* u *est diagonalisable si et seulement si* u *est une symétrie vectorielle orthogonale.*
En d'autres termes, les seuls automorphismes orthogonaux diagonalisables sont les symétries orthogonales.

car ...

Théorème 11.1.22 *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Soit F un sev de E stable par u.*
Alors $F^\perp$ est stable par u et $u_{|F} \in \mathcal{O}(F)$, $u_{|F^\perp} \in \mathcal{O}(F^\perp)$.

car ...

Théorème 11.1.23 *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. $Ker(u - id)$ et $Im(u - id)$ sont des sev supplémentaires orthogonaux.*

car ...

Théorème 11.1.24 *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. $Ker(u - id) \perp Ker(u + id)$.*

car ...

11.1.5 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans ce paragraphe, E_2 est de dimension 2.

Théorème 11.1.25 *Les éléments de $\mathcal{O}(2)$ sont :*

— *les matrices $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$; ce sont les éléments de $SO(2)$ i.e. $\mathcal{O}^+(2)$*

— *les matrices $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$;*
ce sont les éléments de $\mathcal{O}(2) \setminus SO(2) = \mathcal{O}^-(2)$

car ...

Corollaire 11.1.26 *Soit $u \in SO(E_2)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E_2.*
Alors $\exists \theta \in \mathbb{R},\ Mat_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$.
On dit que u est la rotation d'angle θ.

Conséquence 11.1.27 *$(SO(2), \times)$ est un groupe abélien.*

Corollaire 11.1.28 *Les éléments de $\mathcal{O}^-(E_2)$ sont les endomorphismes dont la matrice dans une base orthonormale est du type S_θ.*
Or un calcul simple montre que $S_\theta^2 = I_2$.

D'où la propriété

Proposition 11.1.29 *Donc les éléments de $\mathcal{O}^-(E_2)$ sont les symétries orthogonales par rapport à une droite.*

car ...

Proposition 11.1.30 *Pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta'} R_\theta = R_{\theta+\theta'}$ et donc $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.*

Clair : calcul matriciel.

Conséquence 11.1.31 *Soit $u \in SO(E_2)$.*
Alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tq $\forall \mathcal{B}$ base orthonormale directe, $Mat_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$.

θ ne dépend pas de la base orthonormale directe.

Proposition 11.1.32 *Soit $u \in SO(E_2)$. $u \notin \{id, -id\} \Longrightarrow u$ n'est pas diagonalisable, i.e. R_θ diagonalisable si et seulement si $\theta \equiv 0 \mod \pi$*

car ...

Proposition 11.1.33 *Soit* $u \in SO(E_2)$ *et* $\mathcal{B}$ *une base orthonormée directe telle que* $Mat_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$*. Alors* $\forall x \neq 0,\ (\widehat{x, u(x)}) \equiv \theta \mod 2\pi$

car ...

Proposition 11.1.34 *Soit* $u \in \mathcal{O}^-(E_2)$*.*
Alors u *est diagonalisable, et* $\exists \mathcal{B}$ *base orthonormale de* E_2 *tq* $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

car ...

11.1.6 Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale

Théorème 11.1.35 *Soit* $u \in L(E)$ *et* E *un ev réel de dimension finie. Il existe une droite ou un plan stable par* u*.*

Car ...

Remarque 11.1.36 *C'est un théorème qui est vrai même si* E *n'est pas muni d'un produit scalaire .*

Théorème 11.1.37 Réduction des isométries vectorielles
Soit E *un espace euclidien de dimension* $n \geqslant 1$ *et soit* $u \in \mathcal{O}(E)$*.*
Il existe une base orthonormée de E*,* $\mathcal{B}$*, tq* $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ *est une matrice diagonale par blocs :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & 0 & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix} \text{ où } R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\theta \not\equiv 0 \mod \pi$*, et* $p, q, s \in \mathbb{N}$ *tq* $p + q + 2s = n$

Car ...

11.1.7 Produit vectoriel dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Définition-théorème 11.1.38 *Soit* x, y, z *trois vecteurs de* E*.*
$det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$ *ne dépend pas de la base* $\mathcal{B}$ *orthonormée* ***directe*** *choisie.*
Ce déterminant s'appelle produit mixte des vecteurs x, y, z*.*

car ...

Définition-théorème 11.1.39 *Soit* $\mathcal{B}$ *une base orthonormée directe et* $x, y \in E$*. Alors* $\exists! a \in E$ *tq* $\forall z \in E,\ det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = < a, z >$
Ce vecteur a *s'appelle produit vectoriel de* x *par* y *et se note* $a = x \wedge y$*.*
Le vecteur $x \wedge y$ *ne dépend pas de la base orthonormée directe* $\mathcal{B}$ *choisie.*

car ...
La démonstration permet de conclure aussi :

Proposition 11.1.40 *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe, soit x, y vecteurs de E de matrices colonnes des coordonnées dans $\mathcal{B}$:* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$*. Alors le vecteur $x \wedge y$ a pour matrice colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}$:*

$$X \wedge Y = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Exemple 11.1.41 *Soit $x = (1, 2, 3)$ et $y = (3, 2, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Déterminer $x \wedge y$.*
Même question avec $x = (0, 1, 0)$ et $y = (0, 0, 1)$.

Proposition 11.1.42 — *L'application* $\begin{cases} E^2 & \to E \\ (x, y) & \to x \wedge y \end{cases}$ *est bilinéaire.*

- *Elle est aussi antisymétrique, i.e.* $\forall x, y, \ y \wedge x = -x \wedge y$
- $x \wedge y = 0 \iff x$ *et* y *sont liés.*
- $(x \wedge y) \perp x$ *et* $(x \wedge y) \perp y$.
- *Soit* $= (e_1, e_2, e_3)$ *une base orthonormée directe.*
  $$x = \sum_{k=1}^{3} x_k e_k \text{ et } y = \sum_{k=1}^{3} y_k e_k \Longrightarrow x \wedge y = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3$$

Conséquence 11.1.43 *Soit e_1 et e_2 vecteurs de E normés et orthogonaux. Alors $(e_1, e_2, e_1 \wedge e_2)$ est une base orthonormée directe.*

11.1.8 Groupe des rotations en dimension 3

E est de dimension 3 et orienté.

Théorème 11.1.44 *Soit $u \in SO(E)$.*
Alors il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et il existe un réel θ tels que

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$$

Si u n'est pas l'identité, on appelle axe de cette rotation la droite $Ker(u - id)$ orientée par le vecteur e_1
Cet angle θ est indépendant de la base orthonormée directe choisie. On l'appelle "angle" de la rotation u.

Car ...

Conséquence 11.1.45 *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.*
u est un automorphisme orthogonal direct si et seulement si $(u = id$ ou $dim\ Ker(u - id) = 1)$

car ...

Remarque 11.1.46 *Avec les notations du théorème 11.1.44,* $1 + 2\cos(\theta) = tr(u)$. *On connait donc très facilement la valeur absolue de l'angle* θ.

Exemple 11.1.47 *On reprend l'exemple 11.1.16* $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.
Déterminer l'axe orienté et l'angle de la rotation u.

Exemple 11.1.48 *Même question avec* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

11.2 Endomorphismes symétriques

11.2.1 Généralités

Définition 11.2.1 *Soit* $u \in L(E)$.
On dira que u *est symétrique si et seulement si* $\forall x, y \in E,\ < x, u(y) >=< u(x), y >$
On note $S(E)$ *l'ensemble des endomorphismes symétriques*

Proposition 11.2.2 $S(E)$ *est un sev de* $L(E)$

Faites le.

Exemple 11.2.3 *Les symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques car ...*

Exemple 11.2.4 *Les projections orthogonales sont des endomorphismes symétriques*

Exemple 11.2.5 $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire* $< A, B >= tr({}^tA.B)$
alors l'application $A \to {}^tA$ *est symétrique.*

11.2.2 Matrices symétriques

Définition 11.2.6 *(Rappel)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *On dit que* A *est symétrique si et seulement si* ${}^tA = A$.
On note $S_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices symétriques de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 11.2.7 *(Rappel)*
$S_n(\mathbb{R})$ *est un sev de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de dimension* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Théorème 11.2.8 *Soit* $\mathcal{B}$ *une base orthonormée de* E *et* $u \in L(E)$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.

$$u \in S(E) \iff A \in S_n(\mathbb{R})$$

car ...

11.2.3 Stabilité, orthogonalité

Théorème 11.2.9 *Soit $u \in S(E)$ et F un sev de E.*
F est stable par $u \Longrightarrow F^{\perp}$ est stable par u, et $u_{|F} \in S(F)$ et $u_{F^{\perp}} \in S(F^{\perp})$.

Car ...

Théorème 11.2.10 *Soit $u \in S(E)$.*
$Im(u)$ et $Ker(u)$ sont supplémentaires orthogonaux, i.e. $E = Im(u) \oplus Ker(u)$ et $Im(u) \perp Ker(u)$

Car ...

Théorème 11.2.11 *Soit $u \in S(E)$.*
Les sev propres de u sont en somme directe et sont orthogonaux deux à deux.

Car ...

11.2.4 Le théorème spectral

Théorème 11.2.12 *Soit $u \in S(E)$.*
Son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

Car : soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. On sait que χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u sur $\mathbb{C}$ et X vecteur propre complexe associé à λ, donc $X \neq 0$
$AX = \lambda X \Longrightarrow {}^t\overline{X}AX = \lambda\, {}^t\overline{X}X \quad (1)$.
De plus $AX = \lambda X \Longrightarrow {}^tX\,{}^tA = \lambda\,{}^tX \Longrightarrow {}^tXA = \lambda\,{}^tX \Longrightarrow {}^t\overline{X}.\overline{A} = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X} \Longrightarrow {}^t\overline{X}AX = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}.X \quad (2)$
Ainsi (1) et (2) conduisent à $\lambda = \overline{\lambda}$ (car ${}^t\overline{X}.X = \sum |x_k|^2 \neq 0$ car $X \neq 0$). Donc $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme caractéristique de A a toutes ses racines réelles, il est donc scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème 11.2.13 *Soit $u \in S(E)$.*
Alors il existe une base orthonormale diagonalisant u, i.e. E est somme directe orthogonale des sev propres de u, ou encore, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u

car : se fait par récurrence sur $dim(E)$.
...

Conséquence 11.2.14 *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et D diagonale tq $A = PD\,{}^tP$ (car $P \in \mathcal{O}(n) \Longrightarrow P^{-1} = {}^tP$).*
Donc,

Théorème 11.2.15 Le théorème spectral :
*Toute matrice symétrique **réelle** est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ au moyen d'une matrice de passage orthogonale, i.e.*

$$\forall A \in S_n(\mathbb{R}),\ \exists D \text{ diagonale},\ \exists P \in \mathcal{O}(n),\ tq\ D = P^{-1}AP = {}^tPAP$$

Remarque 11.2.16 *Une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas nécessairement diagonalisable : prendre par exemple $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ et montrer que A n'est pas diagonalisable.*

Exemple 11.2.17 *Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. A est symétrique réelle, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La diagonaliser en donnant une matrice de passage orthogonale permettant de la diagonaliser.*

Chapitre 12

Integration sur un intervalle quelconque

Contents

12.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

12.1.1 Intégrale convergente ou divergente

Définition 12.1.1 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ converge si et seulement si la fonction $x \to \int_a^x f$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.*
Dans ce cas $\int_a^{+\infty} f$ désigne alors la limite de la fonction $x \to \int_a^x f$ quand x tend vers $+\infty$.
Si la fonction $x \to \int_a^x f$ n'a pas de limite finie quand x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ diverge, ce qui se note $\int_a^{+\infty} f$ DV, mais il faut bien voir que dans ce cas l'écriture $\int_a^{+\infty} f$ n'a pas de sens mathématique ...

Exemple 12.1.2 *Étudier la convergence des intégrales suivantes :*
1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ 3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

12.1.2 Propriétés

Proposition 12.1.3 ***Linéarité***
Soient $f, g, \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ *CV* $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} (\alpha f + \beta g)$ *CV et alors*
$$\int_a^{+\infty} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{+\infty} f + \beta \int_a^{+\infty} g$$

car ...

Remarque 12.1.4 *Nous venons de prouver que* $\left\{ f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K}) / \displaystyle\int_a^{+\infty} f \ CV \right\}$ *est un espace vectoriel et l'application* $f \to \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *est linéaire sur cet espace.*

Proposition 12.1.5 *Soit* $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ *et* $b > a$.
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge* $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_b^{+\infty} f$ *converge*
et alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$

Proposition 12.1.6 ***Positivité***
Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ *tq* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge*

- *f positive sur* $[a, +\infty[\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f \geqslant 0$
- *Si f est continue et positive sur* $[a, +\infty[$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = 0 \Longrightarrow f = 0$ *sur* $[a, +\infty[$

Car ...

Proposition 12.1.7 ***Comparaison (cas des fonctions positives)***
Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ *et positives tq* $0 \leqslant f \leqslant g$
$\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ *converge* $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge et alors* $0 \leqslant \displaystyle\int_a^{+\infty} f \leqslant \int_a^{+\infty} g$

Proposition 12.1.8 ***Dérivation de*** $x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} f$ ***si f est continue***
Soit $f \in \mathcal{C}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ *tq* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge.*
Alors l'application $F : \begin{cases} [a, +\infty[& \to \mathbb{K} \\ x & \to \displaystyle\int_x^{+\infty} f \end{cases}$ *est dérivable sur* $[a, +\infty[$ *de dérivée* $-f$

Car ...

12.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

12.2.1 Fonction intégrable sur $[a,+\infty[$

Définition 12.2.1 *Soit $f \in \mathcal{CM}''([a,+\infty[,\mathbb{K})$. On dira que f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge*

Remarque 12.2.2 *On dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est absolument convergente.*

Théorème 12.2.3 *f intégrable sur $[a,+\infty[\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, i.e. une intégrale absolument convergente est convergente.*

car ...

Exercice 12.2.4 *Montrer que la fonction $t \to \dfrac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.*

ATTENTION La réciproque de ce théorème est fausse :

Exemple 12.2.5 *On considère la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par :*
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [n,n+1[,\ f(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Montrons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge mais ne converge pas absolument.

- $\displaystyle\int_1^n f = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k}$, *série qui converge (TSA) vers une limite qu'on notera S.*

$\forall x \geqslant 1,\ \displaystyle\int_1^x f = \int_1^{E(x)} f + \int_{E(x)}^x f$. Quand x tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_1^{E(x)} f$ tend vers S.

De plus, $\left|\displaystyle\int_{E(x)}^x f\right| \leqslant \dfrac{1}{E(x)}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge

- *Pour $x \geqslant 2$, $\displaystyle\int_1^x |f| \geqslant \sum_{k=1}^{E(x)-1} \frac{1}{k}$. Cette série diverge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f|$ diverge, i.e. $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ ne converge pas absolument.*

Théorème 12.2.6 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ et soit $b \geqslant a$.*
f intégrable sur $[a,+\infty[\iff f$ intégrable sur $[b,+\infty[$.

Car ...

12.2.2 Fonctions intégrables et à valeurs positives sur $[a,+\infty[$

Remarque 12.2.7 *Si f est* ***positive****, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge $\iff \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument.*

Théorème 12.2.8 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{R}_+)$, f positive.*
f intégrable sur $[a,+\infty[\iff x \to \displaystyle\int_a^x f$ est majorée

Car la fonction $x \to \int_a^x f$ est croissante sur $[a, +\infty[$, donc elle admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée.

12.2.3 Intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$

Théorème 12.2.9 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*
La fonction $t \to \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
Dans ce cas, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$

Car ...
Visualisation :

12.2.4 Comparaison des fonctions sur $[a, +\infty[$

Théorème 12.2.10 *Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ tq $|f| \leqslant |g|$ sur $[a, +\infty[$.*
g est intégrable sur $[a, +\infty[\Longrightarrow f$ est intégrable sur $[a, +\infty[$

C'est une application directe du théorème 12.1.7

Théorème 12.2.11 *Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ tq $f = O_{+\infty}(g)$*
g intégrable sur $[a, +\infty[\Longrightarrow f$ intégrable sur $[a, +\infty[$.

car ...

Théorème 12.2.12 *Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ tq $f = o_{+\infty}(g)$.*
g intégrable sur $[a, +\infty[\Longrightarrow f$ intégrable sur $[a, +\infty[$.

C'est une conséquence du théorème du dessus.

Théorème 12.2.13 *Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ tq $f \underset{+\infty}{\sim} g$.*
g intégrable sur $[a, +\infty[\iff f$ intégrable sur $[a, +\infty[$.

car $f \underset{+\infty}{\sim} g \Longrightarrow f = O_{+\infty}(g)$ et $g = O_{+\infty}(f)$

Exemple 12.2.14 *Etudier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ des fonctions suivantes :*

1. $f : x \to \frac{1}{(2x-1)^2}$
2. $f : x \to \frac{\cos(x)}{x^2}$
3. $f : x \to \frac{1}{\ln(x+1)}$
4. $f : x \to x^2 e^{-x}$
5. $f : x \to \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$
6. $f : x \to \frac{\sqrt{x}}{1+2x}$
7. $f : x \to \frac{1}{(x-2)^2}$

12.2.5 Complément : limite en $+\infty$

Remarque 12.2.15 *ATTENTION : f intégrable sur $[a,+\infty[$ et $f \geqslant 0 \not\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f = 0$*

Voir l'exemple ci dessous :
En s'inspirant de l'exemple ci-dessus, construire une fonction f positive, intégrable sur $[1,+\infty[$

et non bornée.

Théorème 12.2.16 *Hors programme, mais à savoir redémontrer*
Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$, intégrable sur $[a,+\infty[$.
Si f a une limite en $+\infty$ alors cette limite est nulle.

Tout simplement parce que si f a une limite finie ℓ non nulle, alors $f \underset{+\infty}{\sim} \ell$ Or la fonction $x \to \ell$ n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.
Si f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, alors au voisinage de $+\infty$, $f \geqslant 1$. Et la fonction $x \to 1$ n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.
Cqfd

12.3 Intégration sur un intervalle quelconque

12.3.1 Cas des intervalles semi-ouverts : $[a,b[$ ou $]a,b]$

Définition 12.3.1
- *Soit $a<b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$.*
  On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $x \to \displaystyle\int_a^x f$ a une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers b.
- *Soit $a<b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$.*
  On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $x \to \displaystyle\int_x^b f$ a une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a.
- *Dans tous ces cas, cette limite se notera $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ (premier cas) ou $\displaystyle\int_{]a,b]} f$ (second cas)*

Exemple 12.3.2 $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ *converge, car ... Et* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt = -1$

Exemple 12.3.3 *Montrons que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ *converge et donnons sa valeur.*

Définition 12.3.4 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$ (resp $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$). On dira que f est intégrable sur $[a,b[$ ou au voisinage de b (resp $]a,b]$ ou au voisinage de a) si et seulement si $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge. On dit alors aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente.*

Proposition 12.3.5 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$ (resp $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$) avec $f \geqslant 0$.*
f est intégrable sur $[a,b[$ (resp $]a,b]$) si et seulement si la fonction $x \to \int_a^x f$ (resp $x \to \int_x^b f$) est majorée.

En effet ...

Théorème 12.3.6 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$. $\int_a^b f$ converge absolument $\Longrightarrow \int_a^b f$ converge.*
Même chose dans le cas où $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$.

Proposition 12.3.7 *Soit $f,g \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R})$.*
Si $0 \leqslant f \leqslant g$, $\int_a^b g$ CV $\Longrightarrow \int_a^b f$ CV

Mêmes types de démonstrations que dans le cas des fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$.

Théorème 12.3.8 *Soit $f,g \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$.*
- *Si $|f| \leqslant |g|$, g est intégrable sur $[a,b[\Longrightarrow f$ est intégrable sur $[a,b[$.*
- *Si $f = O_b(g)$, g est intégrable sur $[a,b[\Longrightarrow f$ est intégrable sur $[a,b[$.*
- *Si $f \underset{b}{\sim} g$, g est intégrable sur $[a,b[\iff f$ est intégrable sur $[a,b[$.*

Car ...
Écrire le théorème suivant

Théorème 12.3.9 *Soit $f,g \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{R})$.*
- *Si $|f| \leqslant |g|$,*
-
-

12.3.2 Intégrales de Riemann sur $[a,b[$ et sur $]a,b]$

Théorème 12.3.10 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $x \to \dfrac{1}{x^\alpha}$*
- *est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$*
- *est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha < 1$*

car ...

Soient a et b réels avec $a < b$

Théorème 12.3.11 .
- *La fonction $x \to \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si $\alpha < 1$*
- *La fonction $x \to \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si $\alpha < 1$*

car ...

Exemple 12.3.12 *Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :*
1. $t \to \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}$ *sur* $[0,2[$ *et sur* $]-2,0]$
2. $f : t \to \dfrac{\sin(t)}{t^2+3t+5}$ *sur* $[1,+\infty[$.

3. $f : t \to \dfrac{\cos(t)}{t^\alpha}$ *sur* $]0, 1]$.
4. $f : t \to \dfrac{\sin(t)}{t}$ *sur* $]0, 1]$.
5. $f : t \to \dfrac{\sqrt{t^2 - 1}}{\sin(t - 1)}$ *sur* $]1, 2]$.

12.3.3 Cas des intervalles ouverts

Définition 12.3.13 *Soit* $f \in \mathcal{CM}(]a, b[, \mathbb{K})$ *avec* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $a < b$.
On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ *converge si et seulement si* $\exists c \in]a, b[$ *tq* $\displaystyle\int_a^c f$ *et* $\displaystyle\int_c^b f$ *convergent toutes les deux.*
On dit que f *est intégrable sur* $]a, b[$ *si et seulement si* $\displaystyle\int_a^b |f|$ *converge*

Proposition 12.3.14 *Si* $\exists c \in]a, b[$ *tq* $\displaystyle\int_a^c f$ *et* $\displaystyle\int_c^b f$ *convergent toutes les deux, alors*
$\forall d \in]a, b[$, $\displaystyle\int_a^d f$ *et* $\displaystyle\int_d^b f$ *convergent.*
De plus, $\forall d \in]a, b[$, $\displaystyle\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^d f + \int_d^b f$.

car ...

Définition 12.3.15 *Soit* $f \in \mathcal{CM}(]a, b[, \mathbb{K})$ *tq* $\displaystyle\int_a^b f$ *converge, alors on pose* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
avec $c \in]a, b[$ *(*$\displaystyle\int_a^b f$ *ne dépend pas de* c *vue la propriété ci-dessus)*
Cette intégrale se note aussi $\displaystyle\int_I f$.

Exemple 12.3.16
1. $x \to e^{-x^2}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *car ...*
2. $x \to \dfrac{1}{x\sqrt{1 - x}}$ *n'est pas intégrable sur* $]0, 1[$ *car ...*
3. $x \to \dfrac{1}{x^\alpha}$ *n'est pas intégrable sur* $]0, +\infty[$, *et ceci quelque soit* α.
4. $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}$ *est intégrable sur* $]0, 1[$.

12.3.4 Propriétés de l'intégrale sur l'intervalle I

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 12.3.17 ***Linéarité***
L'ensemble $\left\{ f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K}) / tq \displaystyle\int_I f \text{ converge} \right\}$ *est un* $\mathbb{K} - ev$.
De plus $f \to \displaystyle\int_I f$ *est linéaire.*

car ...

Proposition 12.3.18 ***Positivité***
Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

— $f \geqslant 0$ *sur* I *et* $\displaystyle\int_I f$ *converge* $\Longrightarrow \displaystyle\int_I f \geqslant 0$.
— f *continue et positive sur* I. $\displaystyle\int_I f = 0 \Longrightarrow f = 0$ *sur* I

car ...

Conséquence 12.3.19 ***Croissance de l'intégrale***
Soit $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ *tq* $\displaystyle\int_I f$ *et* $\displaystyle\int_I g$ *convergent.*
$f \leqslant g \Longrightarrow \displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$

Car on sait que $\displaystyle\int_I (g-f)$ converge (linéarité) et $\displaystyle\int_I (g-f) \geqslant 0$ (positivité). Alors par linéarité de l'intégrale, on obtient le résultat.

Proposition 12.3.20 ***Relation de Chasles***
Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ *tq* $\displaystyle\int_I f$ *converge.*
$\forall a, b, c \in \overline{I}$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_b^c f$ $\displaystyle\int_a^c f$ *convergent et* $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

Car ...

Proposition 12.3.21 ***Inégalité triangulaire***
Soit f, g *intégrables sur* I. *Alors* $f+g$ *est intégrable sur* I *et* $\displaystyle\int_I |f+g| \leqslant \int_I |f| + \int_I |g|$

Tout repose sur $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, ce qui prouve que $f+g$ est intégrable sur I. Puis on utilise la croissance de l'intégrale.

Corollaire 12.3.22 *L'ensemble des fonctions* f, *continues par morceaux sur* I *et intégrables sur* I *est un* $\mathbb{K}-ev$. *Cet espace se note* $L(I)$.
De plus $\begin{cases} L(I) & \to \mathbb{K} \\ f & \to \displaystyle\int_I f \end{cases}$ *est linéaire*

12.3.5 Intégration des relations de comparaison

Théorème 12.3.23 *Soit* $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ *avec* g *positive, où* $I = [a, b[$.
— *Si* $f = O_b(g)$. g *intégrable sur* $I \Longrightarrow f$ *intégrable sur* I *(on le savait déjà)*
et alors $\displaystyle\int_x^b f = O_b\left(\int_x^b g\right)$
— *Si* $f = o_b(g)$. g *intégrable sur* $I \Longrightarrow f$ *intégrable sur* I *(on le savait déjà)*
et alors $\displaystyle\int_x^b f = o_b\left(\int_x^b g\right)$
— $f \underset{b}{\sim} g$. g *intégrable sur* $I \iff f$ *intégrable sur* I *(on le savait déjà)*
De plus

— *Si f et g sont intégrables sur I,* $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$

— *Si f et g sont non intégrables sur I,* $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$

car ...

Corollaire 12.3.24 *Ce théorème se décline aussi dans le cas où $I =]a,b]$.*
Si $I =]a,b[$, alors il faut scinder l'intervalle en $]a,c]et[c,b[$

Remarque 12.3.25 *Que dit ce théorème dans le cas où les fonctions sont équivalentes en b ?*
- *si elles sont intégrables, alors les "restes" sont équivalents en b*
- *si elles ne sont pas intégrables, alors les primitives sont équivalentes en b (cas des fonctions continues sur I pour qu'une primitive existe)*

Exemple 12.3.26 — *Donnons, en le justifiant, un équivalent au voisinage de $+\infty$ de* $x \to \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t+\sqrt{t}}$

— *Donnons, en le justifiant, un équivalent au voisinage de $+\infty$ de* $x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

Exercice 12.3.27 *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln(1-x)} \int_0^x \frac{dt}{e^t - e}$

12.4 Techniques de calculs

12.4.1 Changement de variable

Théorème 12.4.1 *Soit f continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
Soit φ une application de l'intervalle J dans I, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de J sur I.
Alors les intégrales $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_J f\circ\varphi.|\varphi'|$ sont de même nature et sont égales si elles sont convergentes.
Si $I =]a,b[$ et $J =]\alpha,\beta[$, alors
- *Si φ est croissante,* $\displaystyle\int_I f = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(u)\varphi'(u)du$
- *Si φ est décroissante,* $\displaystyle\int_I f = \int_\beta^\alpha f\circ\varphi(u)\varphi'(u)du$

Lemme 12.4.2 *φ continue et injective sur $I \Longrightarrow \varphi$ est strictement monotone sur I*

Ce lemme est important car souvent utilisé, il faut être capable d'en faire une démonstration ..
Pour la démonstration voir la feuille d'exercices "Continuité ..."
Démontrons alors le théorème

Exemple 12.4.3 *Calculons les intégrales suivantes si elles convergent :*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$

12.4.2 Intégration par partie

Théorème 12.4.4 *Soit f, g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et soit $a \in \overline{I}$ et $b \in \overline{I}$.*
Si le produit fg possède des limites finies en a et en b, alors les intégrales $\int_a^b f'.g$ et $\int_a^b f.g'$ sont de même nature.
Si ces intégrales convergent alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_{t\to a}^{t\to b} - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

où $[f(t)g(t)]_{t\to a}^{t\to b} = \lim\limits_{t\to b} f(t)g(t) - \lim\limits_{t\to a} f(t)g(t)$

En effet ...

Notation 12.4.5 *L'expression $[f(t)g(t)]_{t\to a}^{t\to b}$ se note aussi $[f(t)g(t)]_a^b$.*

Exemple 12.4.6 *Calculer, si elle existe l'intégrale :* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$

Exemple 12.4.7
1. *Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ sont de même nature.*
2. *En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$*
3. *Montrer que la fonction $t \to \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.*

Remarque 12.4.8 *On vient ainsi de montrer que la réciproque du théorème 12.3.6 est fausse.*

Exemple 12.4.9 *Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.*
1. *Pour quelles valeurs de l'entier n l'intégrale I_n est-elle définie ?*
2. *Dans ces conditions, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.*
3. *Exprimer I_{n+1} en fonction de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)dx$*

12.4.3 Attention

Il faut être très vigilant lorsqu'on décompose une fonction intégrable en somme de 2 ou plusieurs fonctions, par exemple dans le cas de décomposition en éléments simples. Prenons un exemple . Calculons $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$. La fonction f est définie par $f : t \to \dfrac{1}{t^2-1}$. f est clairement continue sur $I = [2, +\infty[$ et au voisinage de $+\infty$, $f(t) \sim \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable sur $[2, +\infty[$. Donc f est intégrable sur $[2, +\infty[$, l'intégrale à calculer est effectivement définie.
Pour la calculer, on va tenter d'utiliser la méthode employée pour les intégrales définies sur un segment, à savoir décomposer f en éléments simples. On trouve alors :
$\forall t \geqslant 2,\ f(t) = \dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{1/2}{t-1} - \dfrac{1/2}{t+1}$. Mais aucune des deux intégrales $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1/2}{t-1}dt$ et

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1/2}{t+1} dt$ ne converge. Écrire que l'intégrale de f sur I serait égale à $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1/2}{t-1} dt - \int_2^{+\infty} \frac{1/2}{t+1} dt$ serait une ÉNORMITÉ.
Pour calculer l'intégrale de f sur I en utilisant la décomposition en éléments simples, on devra revenir à la définition, c'est à dire calculer l'intégrale de f sur $[2, A]$. Dans ce cas, on est en présence d'une intégrale sur un segment, et on peut utiliser sans souci la décomposition en éléments simples. Une fois le calcul terminé, on fera tendre A vers $+\infty$ pour obtenir le résultat recherché.

Faites le calcul.

12.5 Des evn

12.5.1 Convergence en moyenne

Définition-théorème 12.5.1 *L'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{K}$ continues et intégrables sur I est un sev de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, qui est noté $L^1_c(I, \mathbb{K})$ ou $L^1_c(I)$ s'il n'y a pas de doute sur le corps $\mathbb{K}$.*
Cet ev est normé par $N_1 : f \to \displaystyle\int_I |f|$.
N_1 est appelée norme de la convergence en moyenne.

car ...

Remarque 12.5.2 *N_1 n'est pas une norme sur $L^1(I)$.*

Exercice 12.5.3 *Soit I un intervalle* ***borné*** *et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1_c(I)$ et soit $f \in L^1_c(I)$.*
Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour $\|.\|_\infty$ (i.e. (f_n) converge uniformément vers f) alors $\displaystyle\lim_n \int_I f_n = \int_I f$.
Montrer que si I n'est pas borné, cette propriété est fausse.

12.5.2 Convergence en moyenne quadratique

Définition 12.5.4 *Une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$ est dite de carré intégrable sur I si et seulement si la fonction $|f|^2$ est intégrable sur I.*
On note $L^2_c(I)$ l'ensemble de ces fonctions.

Proposition 12.5.5 *$f, g \in L^2_c(I) \Longrightarrow fg \in L^1_c(I)$*

car ...

Proposition 12.5.6 *$L^2_c(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel préhilbertien muni du produit scalaire : .*
$$\begin{cases} L^2_c(I) \times L^2_c(I) & \to \mathbb{K} \\ (f, g) & \to \displaystyle\int_I fg \end{cases}.$$

Car ...

Conséquence 12.5.7 *$N_2 : f \to \sqrt{\displaystyle\int_I f^2}$ est une norme (euclidienne)sur $L^2_c(I, \mathbb{R})$.*

Chapitre 13

Intégrales à paramètres

Contents

13.1 Le théorème de convergence dominée

13.1.1 La question : passage à la limite dans une intégrale

Contrairement à ce qui se passe pour des intégrales sur un segment, le passage à la limite, même s'il y a convergence uniforme pose problème :

$$\left.\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ suite de fonctions intégrables sur } I\\ (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I\\ f \text{ intégrable sur } I\end{array}\right\} \not\Rightarrow \lim_n \int_I f_n = \int_I \lim_n f_n = \int_I f$$

Par exemple, soit $I = [0, +\infty[$ et pour $n \geqslant 1$, $f_n : x \to \left\{\begin{array}{cc} 1/n & \text{sur } [0, n] \\ 0 & \text{pour } x > n\end{array}\right.$

— $\underset{I}{Sup}\,|f_n| = \dfrac{1}{n}$ donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.
— $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^n \frac{1}{n} = 1$ alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_n f_n = \int_0^{+\infty} 0 = 0$

13.1.2 Le théorème de convergence dominée

Théorème 13.1.1 .

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite de fonctions continues par morceaux sur } I \\ \bullet\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } I \text{ vers une fonction } f \text{ continue par morceaux sur } I \\ \bullet\ \exists\varphi : I \to \mathbb{R}_+ \text{ intégrable sur } I \text{ tq } \forall n,\ |f_n| \leqslant \varphi \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \text{les fonctions } f_n \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I \\ \bullet\ \lim_n \int_I f_n = \int_I f = \int_I \lim_n f_n \end{array}\right.$$

Démonstration hors programme

Remarque 13.1.2 *φ doit être intégrable sur I, doit majorer toutes les fonctions $|f_n|$ et ne doit pas dépendre de n.*
Cette hypothèse est ce qu'on appelle l'hypothèse de DOMINATION

Exemple 13.1.3 *Déterminer* $\lim_n \int_0^1 \frac{dt}{1 - n\ln(t)}$

Exemple 13.1.4 *Déterminer* $\lim_n \int_0^{+\infty} e^{-t^3-nt^2}dt.$

Exemple 13.1.5

On considère les fonctions $f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ t & \to \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \end{cases}.$

1. *Montrer que* $\lim_n \int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$
2. *Montrer que* $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(t)dt.$
3. *Posons* $w_n = \int_0^{\Pi/2} \cos^n(t)dt$. *Déterminer une relation liant w_n à w_{n-2} ($n \geqslant 2$)*
   En déduire un équivalent de w_n
4. *Donner la valeur de* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

Exemple 13.1.6 *Déterminer* $\lim_n \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1}$

Remarque 13.1.7 *Si I est borné, une fonction constante peut jouer le rôle de la fonction dominante*

Remarque 13.1.8 *L'hypothèse de continuité par morceaux de f n'a pas autant d'importance que l'hypothèse de domination. Cette dernière devra être justifiée avec le plus grand soin.*

13.1.3 Extension au cas d'une famille à paramètre réel

Théorème 13.1.9 *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\lambda_0 \in \overline{J}$.*

$$\left.\begin{array}{ll}\bullet & (f_\lambda)_{\lambda\in J} \text{ une famille de fonctions continues par morceaux sur } I \\ \bullet & \forall x \in I, f_\lambda(x) \text{ a une limite finie quand } \lambda \text{ tend vers } \lambda_0, \\ & \text{limite notée } f(x) \\ \bullet & f \text{ ainsi définie est continue par morceaux sur } I \\ \bullet & \exists \varphi \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R}_+) \text{ tq } \varphi \text{ est intégrable sur } I \text{ et } \forall\lambda \in J,\ |f_\lambda| \leqslant \varphi\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\bullet & \forall\lambda \in J,\ f_\lambda \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet & f \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet & \displaystyle\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_I f_\lambda = \int_I \lim_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda = \int_I f\end{array}\right.$$

Car ...

Exemple 13.1.10 *Soit, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\lambda : x \to \begin{cases}(1-\lambda x)^{1/\lambda} \text{ si } 0 \leqslant x < 1/\lambda \\ 0 \text{ si } x \geqslant 1/\lambda\end{cases}$.*

Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0}\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)dx$

13.1.4 Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème 13.1.11 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (noté $\mathbb{K}$), définies sur un intervalle I*

$$\left.\begin{array}{ll}\bullet & \forall n,\ f_n \in L^1(I,\mathbb{K}) \\ \bullet & \sum f_n \text{ CV simplement sur } I \text{ vers une fonction } S \\ & \text{continue par morceaux sur } I \\ \bullet & \displaystyle\sum \int_I |f_n| \text{ converge}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\bullet & S \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet & \displaystyle\int_I S = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n\end{array}\right.$$

Démonstration hors programme.

Remarque 13.1.12 ***ATTENTION*** *: Il y a ici une hypothèse de plus que pour les suites : il faut que les fonctions f_n soient intégrables sur I*

Remarque 13.1.13 *L'hypothèse de domination est remplacée ici par : la série numérique $\sum \int_I |f_n|$ converge*

Exemple 13.1.14 *Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}$*

Exemple 13.1.15 *Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$*

Exemple 13.1.16 *Que peut-il se passer si l'hypothèse $\sum \int_I |f_n|$ converge n'est pas satisfaite ? Exemple de la suite de fonction $(f_n)_{n\geqslant 1}$ où $f_n : x \to e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ sur $I =]0,+\infty[$.*

Remarque 13.1.17 *L'hypothèse* $\sum \int_I |f_n|$ *converge est fondamentale*

L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme n'a pas la même importance. On la vérifiera quand même (ou au pire, on la mentionnera)

13.1.5 Autres possibilités pour intégrer terme à terme une série de fonctions

Théorème 13.1.18 ***Cas où I est un segment (rappel)***
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ *avec* $I = [a,b]$ ***segment.***
$$\sum f_n \text{ CVU sur } [a,b] \Longrightarrow \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$$

Que faire si I n'est pas un segment et $\sum \int_I |f_n|$ diverge ?
On peut encore essayer d'utiliser le théorème de convergence dominée appliqué à la suite des sommes partielles, ou à la suite des restes.

Exemple 13.1.19 *Montrons que* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-nt}\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

13.2 Limite et continuité

Dans toute la suite, E est un evn de dimension finie (le plus souvent, $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $A \subset E$, I intervalle de $\mathbb{R}$.

13.2.1 Continuité par domination

Théorème 13.2.1 *Soit* $f : A \times I \to \mathbb{K}$ *tq*
- $\forall t \in I,\ x \to f(x,t)$ *est continue sur* A
- $\forall x \in A,\ t \to f(x,t)$ *est continue par morceaux sur* I
- $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}_+$ *intégrable sur* I *et tq* $\forall x \in A,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ *(hypothèse de domination sur A)*

alors
$$F : x \to \int_I f(x,t)dt \text{ est définie et continue sur } A$$

car ...

Exemple 13.2.2 *Soit f continue et intégrable sur* $\mathbb{R}$. *On définit la transformée de Fourier de f comme étant la fonction, notée $\hat{f}$ définie par* $\hat{f} : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt$. *Montrons que $\hat{f}$ est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 13.2.3 *Montrer que la fonction* $F : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{1+t^2}dt$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 13.2.4 *Montrons que la fonction* $F : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{x+t^4}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$.

Remarque 13.2.5 *Comme vu dans l'exemple du dessus, au lieu de l'hypothèse de domination sur A on peut se contenter de l'hypothèse de domination sur tout compact de A. Ce qui se traduit par le théorème plus général suivant :*

Théorème 13.2.6 *Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ tq*
- $\forall t \in I,\ x \to f(x,t)$ *est continue sur A*
- $\forall x \in A,\ t \to f(x,t)$ *est continue par morceaux sur I*
- $\forall K$ *compact de A* $, \exists \varphi_K : I \to \mathbb{R}_+$ *intégrable sur I et tq* $\forall x \in K,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t)$
  (hypothèse de domination sur tout compact)

alors

$$F : x \to \int_I f(x,t)dt \text{ est définie et continue sur } A$$

car ...

Exemple 13.2.7 *Soit* $F \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + E(t)^2}dt \end{cases}$. *Étudions la continuité de F sur* $]0, +\infty[$.

Exemple 13.2.8 *Soit* $F \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \to \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^x)} \end{cases}$. *Étudions la continuité de F sur* $]0, +\infty[$.

13.2.2 Continuité dans le cas d'une intégration sur un segment (HP mais savoir le démontrer)

C'est une conséquence du théorème précédent.

Théorème 13.2.9 *Soit $f : A \times [a,b] \to \mathbb{K}$ continue.*
Alors $F : x \to \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt$ *est définie et continue sur A*

car Si K est un compact de A, alors $K \times [a,b]$ est un compact de $A \times [a,b]$. Or $|f|$ est continue sur $A \times [a,b]$, donc elle est majorée sur tout compact, i.e.
$\exists M_K > 0,\ \forall (x,t) \in K \times [a,b],\ |f(x,t)| \leqslant M_K$. La fonction constante $t \to M_K$ est intégrable sur $[a,b]$, donc l'hypothèse de domination sur tout compact est satisfaite. F est donc continue sur A.

Exemple 13.2.10 *Montrons que la fonction* $F : x \to \displaystyle\int_0^1 \ln(x + t^2)dt$ *est continue sur* $]0, +\infty[$.

Exemple 13.2.11 *Soit* $F : x \to \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{x+t}dt$
On voit que la variable x apparait à la fois comme argument de la fonction à intégrer et en borne. On ne dispose d'aucun théorème dans ce cas.

1. *À l'aide d'un changement de variable judicieux, écrire $F(x)$ comme une intégrale sur* $[0,1]$.
2. *Montrer que F est définie et continue sur* $]0, +\infty[$.

13.2.3 Limite

Théorème 13.2.12 *Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ et $a \in \overline{A}$.*

$$\left.\begin{array}{ll}\bullet & \forall t \in I,\ \lim\limits_{x\to a} f(x,t) = \ell(t) \in \mathbb{K} \text{ et } t \to l(t) \text{ continue par morceaux sur } I \\ \bullet & \forall x \in A,\ t \to f(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \bullet & \exists \varphi \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{R}_+) \text{ intégrable sur } I \text{ tq } \forall x \in A,\ \forall t \in I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \text{ domination}\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\bullet & \forall x \in A,\ t \to f(x,t) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet & t \to \ell(t) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet & \lim\limits_{x\to a} \displaystyle\int_I f(x,t)dt = \int_I \ell(t)dt\end{array}\right.$$

car ...

Exemple 13.2.13 *Déterminons* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \, dt$

Remarque 13.2.14 *Ce théorème ne permet pas de répondre à toutes les situations. Penser aussi à des majorations, ou minorations.*

Exemple 13.2.15 *Soit* $F : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+\sqrt{t}} dt$ *définie pour* $x > 0$

1. *Déterminons* $\lim\limits_{+\infty} F$
2. *Déterminons* $\lim\limits_{0} F$

13.3 Dérivabilité

Ici A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

13.3.1 Le théorème de dérivation de Leibniz

Théorème 13.3.1 *Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$*

$$\left.\begin{array}{ll}\bullet & \forall x \in A,\ t \to f(x,t) \text{ est intégrable sur } I \\ \bullet & f \text{ admet en tout point } (x,t) \in A \times I \text{ une dérivée partielle selon } x \\ \bullet & \forall x \in A,\ t \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \bullet & \exists \varphi : I \to \mathbb{R}_+ \text{ intégrable sur } I \text{ tq } \forall (x,t) \in A \times I,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\bullet & \text{la fonction } F : x \to \displaystyle\int_I f(x,t)dt \text{ est dérivable sur } A \text{ et} \\ \bullet & \forall x \in A,\ F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt\end{array}\right.$$

car ...

Remarque 13.3.2 *Comme pour la continuité, la conclusion reste vraie si au lieu de l'hypothèse de domination, on ne prouve qu'une hypothèse de domination sur tout segment de A*

Ceci conduit au théorème

Théorème 13.3.3 *Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$*

$$\left.\begin{array}{ll}
\bullet & \forall x \in A,\ t \to f(x,t) \text{ est intégrable sur } I \\
\bullet & f \text{ admet en tout point } (x,t) \in A \times I \text{ une dérivée partielle selon } x \\
\bullet & \forall x \in A,\ t \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\
\bullet & \forall J \text{ segment de } A,\ \exists \varphi_J : I \to \mathbb{R}_+ \text{ intégrable sur } I \text{ tq} \\
 & \forall (x,t) \in J \times I,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi_J(t)
\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\bullet & \text{la fonction } F : x \to \displaystyle\int_I f(x,t)dt \text{ est dérivable sur } A \text{ et} \\
\bullet & \forall x \in A,\ F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt
\end{array}\right.$$

Proposition 13.3.4 *Si on suppose en outre que $\forall t \in I,\ x \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A, alors la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.*

clair

Exemple 13.3.5 *Soit $F : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$.*

1. *Montrons que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrons que F est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à déterminer.*
3. *On a vu dans l'exemple 13.1.5 que $F(0) = \sqrt{\pi}$. Déterminons alors l'expression de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.*

13.3.2 Dérivées d'ordre supérieur

Théorème 13.3.6 *Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$*

$$\left.\begin{array}{ll}
\bullet & \forall x \in A,\ t \to f(x,t) \text{ est intégrable sur } I \\
\bullet & f \text{ admet en tout point } (x,t) \in A \times I \text{ des dérivées partielles jusqu'à l'ordre } n \text{ selon } x \\
\bullet & \forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall t \in I,\ x \to \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \text{ est continue sur } A \\
\bullet & \forall x \in A, \forall k \in [\![1,n]\!],\ \ t \to \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \text{ est continue par morceaux sur } I \\
\bullet & \forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall J \text{ segment de } A,\ \exists \varphi_{k,J} : I \to \mathbb{R}_+ \text{ intégrable sur } I \text{ tq} \\
 & \forall (x,t) \in J \times I,\ \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{k,J}(t)
\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\bullet & \text{la fonction } F : x \to \displaystyle\int_I f(x,t)dt \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } A \text{ et} \\
\bullet & \forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in A,\ F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt
\end{array}\right.$$

se fait par récurrence sur n

Exemple 13.3.7 *Soit $F : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que F de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F^{(k)}(x)$*

13.3.3 Cas d'une intégration sur un segment

Dans ce cas le théorème se simplifie un peu :

Théorème 13.3.8 *Soit* $f : A \times [a,b] \to \mathbb{K}$
• $\forall x \in A,\ t \to f(x,t)$ *est continue par morceaux sur* $[a,b]$
• $\forall t \in [a,b],\ f$ *admet des dérivées partielles selon* x *jusqu'à l'ordre* n, *et ces dérivées partielles sont toutes continues sur* $A \times [a,b]$

$$\Longrightarrow$$

F *est de classe* C^n *sur* A *et* $\forall k \in [\![1,n]\!],\ F^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$

Car ...

13.3.4 Théorème de Fubini sur un pavé fermé

Théorème 13.3.9 *Soit* $f : [c,d] \times [a,b] \to E$ *continue sur* $[c,d] \times [a,b]$
Alors

1. $x \to \int_a^b f(x,t)dt$ *est continue sur* $[c,d]$
2. $t \to \int_c^d f(x,t)dx$ *est continue sur* $[a,b]$
3. $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dx\right)dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)dt\right)dx$

car ...

Chapitre 14

Familles sommables de nombres complexes

Contents

14.1 Dénombrabilité

14.1.1 Ensembles dénombrables

Définition 14.1.1 *Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec* $\mathbb{N}$*.*

Exemple 14.1.2 $\mathbb{Z}$ *est dénombrable.*

En effet considérons $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{Z} \\ n & \to \begin{cases} n/2 & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases} \end{cases}$*. Montrer que* f *est bijective.*

Théorème 14.1.3 *Toute partie infinie de* $\mathbb{N}$ *est dénombrable*

Car : soit E une partie infinie de $\mathbb{N}$. E possède un plus petit élément. On le note $f(0)$. Puis $E \setminus \{f(0)\}$ possède un plus petit élément qu'on note $f(1)$. Puis, par récurrence, $E \setminus \{f(0), f(1), ..., f(n-1)\}$ possède un plus petit élément qu'on note $f(n)$. On a ainsi construit une fonction $f : \mathbb{N} \to E$ strictement croissante car $f(n+1) \geqslant f(n) + 1$, donc f est injective.
Montrons que f est surjective. Soit $q \in E$.
f croît strictement et est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = +\infty$. D'où, $\exists p \in \mathbb{N},\ f(p) \leqslant q < f(p+1)$. Or $f(p+1)$ est le minimum de $E \setminus \{f(0, ..., f(p)\}$, et $q \in E$ donc $q = f(p)$. f est donc surjective donc bijective de $\mathbb{N}$ sur E, et donc E est dénombrable.

Corollaire 14.1.4 *Un ensemble est fini ou dénombrable (on dit aussi "au plus dénombrable") si et seulement si il est en bijection avec une partie de* $\mathbb{N}$*.*

car ...

14.1.2 Produit cartésien d'ensembles dénombrables

Théorème 14.1.5 $\mathbb{N}^2$ *est dénombrable.*

car ...

Théorème 14.1.6 *Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Par récurrence : Pour $n = 2$, Soient E et F deux ensembles dénombrables. Soit $f : E \to \mathbb{N}$ et $g : F \to \mathbb{N}$ bijectives. Alors l'application $(f, g) : E \times F \to \mathbb{N}^2$ est bijective. Or $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, donc il existe une application $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ bijective. D'où, $\varphi \circ (f, g)$ est une application bijective de $E \times F$ dans $\mathbb{N}$, et donc, $E \times F$ est dénombrable.
Puis, $E_1 \times E_2 \times ... \times E_{p+1} = (E_1 \times ... \times E_p) \times E_{p+1}$ qui permet de terminer la récurrence.

Conséquence 14.1.7 $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^p$ *où* $p \in \mathbb{N}^*$ *sont dénombrables.*

14.1.3 Réunion d'ensembles dénombrables

Théorème 14.1.8 *Une réunion finie d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
Si I *est un ensemble dénombrable, et si* $\forall i \in I,\ E_i$ *est un ensemble dénombrable, alors* $\bigcup_{i \in I} E_i$ *est dénombrable.*
On résume ceci en disant qu'une réunion au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

car ...

Conséquence 14.1.9 *Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.*

Conséquence 14.1.10 $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

En effet, $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \right\}$. Notons $E_q = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \right\}$. Chacun de ces E_q est en bijection avec $\mathbb{Z}$ qui est dénombrable. Donc les E_q sont dénombrables, et donc $\mathbb{Q}$ est réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, donc est dénombrable.

Exercice 14.1.11 *Le but est de montrer que l'ensemble* P *des parties finies de* $\mathbb{N}$ *est dénombrable.*
1. Notons P_n *l'ensemble des parties de* $[\![0, n-1]\!]$*. Quel est le cardinal de* P_n *?*
2. Décrire P *à l'aide des* P_n *et conclure.*

14.1.4 Ensemble des réels

Théorème 14.1.12 $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

démonstration non exigible.

14.2 Familles sommables de réels positifs

Sauf mention du contraire, I est un ensemble dénombrable.

Définition 14.2.1 *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels* ***positifs*** *avec I ensemble dénombrable.*
On dira que cette famille est sommable si et seulement si $\left\{\sum_{i\in F} u_i /\ F \text{ partie finie de } I\right\}$ est un ensemble majoré.
Dans ce cas, la borne sup dans $\mathbb{R}_+$ de cet ensemble est appelée "somme de la famille". Elle est notée $\sum_{i\in I} u_i$.
Si la famille n'est pas sommable, alors on dira que $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Exemple 14.2.2 *Montrons que la famille $\left(\frac{1}{q^2}\right)_{q\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty]}$ n'est pas sommable. Considérons $E = \mathbb{Q}\cap[1,2]$. E est-il fini ? dénombrable ?*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une partie finie F_n de E telle que $\sum_{q\in F_n} \frac{1}{q^2} \geqslant \frac{n}{4}$
Conclure

Proposition 14.2.3 *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs.*
Soit $J \subset I$. Alors la famille $(u_i)_{i\in J}$ est sommable et $\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

car $\left\{\sum_{i\in F} u_i /\ F \text{ partie finie de } J\right\} \subset \left\{\sum_{i\in F} u_i /\ F \text{ partie finie de } I\right\}$, et donc $\left\{\sum_{i\in F} u_i /\ F \text{ partie finie de } J\right\}$ est majoré.
De plus tout majorant de $\left\{\sum_{i\in F} u_i /\ F \text{ partie finie de } I\right\}$ majore $\left\{\sum_{i\in F} u_i /\ F \text{ partie finie de } J\right\}$, ce qui prouve l'inégalité demandée.

Proposition 14.2.4 *Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs tels que $\forall i,\ u_i \leqslant v_i$.*
- *Si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $0 \leqslant \sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$*
- *Si $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors $(v_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.*

car ...

Théorème 14.2.5 ***Théorème de sommation par paquets***
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

$$\text{La famille } (u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ (u_i)_{i\in I_n} \text{ est sommable} \\ \text{et} \\ \text{la série } \sum_n \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) \text{ converge} \end{cases}$$

et dans ce cas $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$

Démonstration hors programme.

Exemple 14.2.6 *Montrons que la famille* $\left(\dfrac{1}{(m+n)^3}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ *est sommable.*
Pour $p \in \mathbb{N}^*$*, notons* $I_p = \big\{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}/m+n=p\big\}$*.*
Vérifier que la famille $(I_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *est une partition de* $\mathbb{N}^{*2}$*.*
Conclure en appliquant le théorème de sommation par paquets.

Théorème 14.2.7 .
$$\left.\begin{array}{l}(u_i)_{i\in I} \text{ famille sommable de réels positifs}\\ (v_i)_{i\in I} \text{ famille sommable de réels positifs}\end{array}\right\} \Longrightarrow (u_i+v_i)_{i\in I} \text{ est sommable}$$
et alors $\displaystyle\sum_{i\in I}(u_i+v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{ß\in I} v_i$

car ...

Théorème 14.2.8 .
$$\left.\begin{array}{c}(u_i)_{i\in I} \text{ famille sommable de réels positifs}\\ \alpha \geqslant 0\end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha u_i)_{i\in I} \text{ est sommable}$$
et alors $\displaystyle\sum_{i\in I}(\alpha u_i) = \alpha \sum_{i\in I} u_i$

car ...

14.3 Familles sommables de réels ou complexes

14.3.1 Généralités

Définition 14.3.1 *Soit* I *un ensemble dénombrable.*
On dira que la famille $(u_i)_{i\in I}$ *de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si la famille de réels positifs* $(|u_i|)_{i\in I}$ *est sommable (on se ramène au paragraphe précedent)*

Définition 14.3.2 .
• *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille sommable de réels.*
Notons $I_+ = \{i \in I/\ u_i \geqslant 0\}$ *et* $I_- = \{i \in I/\ u_i < 0\}$*.*
On appelle somme de la famille le réel $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I_+} |u_i| - \sum_{i\in I_-} |u_i|$
• *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille sommable de nombres complexes.*
On appelle somme de la famille le complexe $\displaystyle\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} Re(u_k) + i\sum_{k\in I} Im(u_k)$

Ces définitions ont bien un sens car :
1) Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels, alors la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable et donc les familles $(|u_i|)_{i\in I_+}$ et $(|u_i|)_{i\in I_-}$ sont sommables (voir 14.2.3)
2) Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de complexes, alors la famille $(|u_k|)_{k\in I}$ est sommable. Or $|Re(u_k)| \leqslant |u_k|$ et $|Im(u_k)| \leqslant |u_k|$, donc les familles $(Re(u_k))_{k\in I}$ et $(Im(u_k))_{k\in I}$ sont sommables.

Conséquence 14.3.3 *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille sommable de réels. Alors pour tout* $J \subset I$*,* $(u_i)_{i\in J}$ *est sommable sur* J

car ...

14.3.2 Linéarité de la somme de familles sommables

Théorème 14.3.4 *Soient $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in I}$ deux familles sommables de réels ou complexes, et soit α et β deux scalaires (réels ou complexes). Alors la famille $(\alpha u_k+\beta v_k)_{k\in I}$ est sommable et* $\displaystyle\sum_{k\in I}(\alpha u_k+\beta v_k)=\alpha\sum_{k\in I}u_k+\beta\sum_{k\in I}v_k$

car ...

Conséquence 14.3.5 *L'ensemble des familles sommables sur I est un espace vectoriel, et l'application $(u_k)_{k\in I}\to\displaystyle\sum_{k\in I}u_k$ est linéaire.*

14.3.3 Lien entre familles sommables et séries

Lemme 14.3.6 *$I=\mathbb{N}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels **positifs**.*
La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable $\iff$ la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge,

et alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

car ...

Théorème 14.3.7 *$I=\mathbb{N}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels ou complexes.*
La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable $\iff$ la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge absolument,

et alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

car ...

14.3.4 Permutation des termes d'une série

Théorème 14.3.8 *Soit $\sum u_n$ une série de complexes absolument convergente, et soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Alors $\displaystyle\sum_n u_{\sigma(n)}$ converge absolument et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_{\sigma(n)}=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.*

Démonstration non exigible.

14.3.5 Théorème de sommation par paquets

Théorème 14.3.9 ***Théorème de sommation par paquets***
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I.
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes.

$$\text{La famille } (u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},\ (u_i)_{i\in I_n} \text{ est sommable}\\ \text{et}\\ \text{la série } \displaystyle\sum_n\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right) \text{ converge}\end{cases}$$

et dans ce cas $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n}u_i\right)$

Montrons l'équivalence :
$(u_i)_{i\in I}$ est sommable $\Longleftrightarrow$ $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable. On applique le théorème 14.2.5

$$(|u_i|)_{i\in I} \text{ est sommable } \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ (|u_i|)_{i\in I_n} \text{ est sommable} \\ \text{et} \\ \text{la série } \displaystyle\sum_n\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right) \text{ converge} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ (u_i)_{i\in I_n} \text{ est sommable} \\ \text{et} \\ \text{la série } \displaystyle\sum_n\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right) \text{ converge} \end{cases}$$

La démonstration de l'égalité est hors programme.

Remarque 14.3.10 *ATTENTION : la famille peut ne pas être sommable avec, cependant la série* $\displaystyle\sum_n\sum_{i\in I_n}u_i$ *qui converge*

par exemple $\forall n,\ u_n=(-1)^n$ et $I_n=\{2n,2n+1\}$.
La famille $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}$ et $\forall n,\ \displaystyle\sum_{i\in I_n}u_i=0$ donc la série $\displaystyle\sum_n\sum_{i\in I_n}u_i$ converge.
Pourtant la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable (sa série ne converge pas absolument)

Exemple 14.3.11 *Soit $q\in\mathbb{C}$ tel que $|q|<1$. Montrons que la famille $(q^{|p|})_{p\in\mathbb{Z}}$ est sommable et donner sa somme.*
On utilisera une sommation par paquets en écrivant $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_-{}^*\cup\mathbb{N}$.

14.4 Séries doubles

14.4.1 Théorème de Fubini : interversion des sommations

Théorème 14.4.1 *Cas des réels positifs.*
Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.

$$\textit{Cette famille est sommable } \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\quad \textit{la série } \displaystyle\sum_m a_{m,n} \textit{ converge} \\ \textit{la série } \displaystyle\sum_n\left(\sum_{m=0}^{+\infty}a_{m,n}\right) \textit{ converge} \end{cases}.$$

Dans ces conditions

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}a_{m,n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}a_{m,n}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{m,n}\right)$$

car ...

Exemple 14.4.2 *Calculons après avoir justifié son existence :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.

On introduit la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ définie par $u_{n,k}=0$ si $k<n$ et $u_{n,k}=\dfrac{1}{k!}$ si $k\geqslant n$.
Montrons que la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et évaluer sa somme. Conclure.

Théorème 14.4.3 *Cas général.*
Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou complexes.

$$\textit{Cette famille est sommable} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \textit{la série } \sum_m |a_{m,n}| \textit{ converge} \\ \textit{la série } \sum_n \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}| \right) \textit{ converge} \end{cases} \iff \begin{cases} \forall m \in \mathbb{N}, \quad \textit{la série } \sum_n |a_{m,n}| \textit{ converge} \\ \textit{la série } \sum_m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_{m,n}| \right) \textit{ converge} \end{cases}.$$

Dans ces conditions

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$$

Car ...

Corollaire 14.4.4 ***: à savoir redémontrer***
Si $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ sont deux familles sommables alors la famille $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q \right)$$

En effet, $\sum_p a_p$ et $\sum_q b_q$ CVA. $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_p |a_p|$ converge $\Longrightarrow \sum_p |a_p b_q|$ converge et $\sum_{p=0}^{+\infty} |a_p b_q| = |b_q| \sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|$ donc $\sum_q \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |a_p b_q| \right)$ converge.
alors, le théorème de Fubini prouve que la famille $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable sur $\mathbb{N}^2$ et $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_p b_q = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(a_p \sum_{q=0}^{+\infty} b_q \right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q \right)$ ce qui achève la démonstration.

14.4.2 Produit de Cauchy de 2 séries absolument convergentes

Définition 14.4.5 *Rappel*
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de complexes. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2/p+q=n} u_p v_q$

Exemple 14.4.6 *Déterminer la série produit de Cauchy de la série $\sum x^n$ par elle même.*

Théorème 14.4.7 *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de complexes absolument convergentes. Alors leur série $\sum w_n$ produit de Cauchy converge absolument et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} v_m \right)$$

car ...

Corollaire 14.4.8 *Soit $z \in \mathbb{C}$.*
La série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument. On note e^z sa somme.
Alors

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$$

En effet ...

Corollaire 14.4.9 *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
La série de terme général $\dfrac{A^n}{n!}$ converge absolument. On note $exp(A)$ sa somme.
*et **si** A **et** B **commutent**,*

$$exp(A+B) = exp(A)\, exp(B) = exp(B)\, exp(A)$$

car ...

Chapitre 15

Probabilités

Contents

15.1 Introduction

Les probabilités consistent à étudier les résultats aléatoires de certaines expériences. Par exemple, dans un lancer de 4 pièces, observer les piles obtenus, ou, autre exemple, dans un lancer de fléchette sur une cible, observer la position de la fléchette par rapport au centre de la cible. Lorsqu'une expérience est étudiée, on appellera "évènements" certains faits pouvant se produire (ou ne pas se produire). Dans le lancer de 4 pièces, par exemple, un évènement pourra être : obtenir exactement 1 pile et 3 faces Dans le lancer de fléchette, un évènement pourra être : la fléchette est à moins de 5 cm du centre de la cible.
Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas où l'ensemble des possibilités n'est pas nécessairement fini.
Pourquoi le formalisme élaboré dans le cas fini ne suffit-il pas quand l'espace des possibilités n'est pas fini ?
Classiquement, effectuons un jeu de Pile ou Face infini, et considérons l'évènement $A = \{\text{on ne tire jamais Pile}\}$.
Dans le cas où on n'effectue que n tirages, on sait calculer la probabilité de l'évènement $A_n = \{\text{On n'a pas tiré Pile lors des } n \text{ premiers lancers}\}$.
Le cours de première année permet de dire que $P(A_n) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{1}{2^n}$.
On peut dire alors que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, et on souhaite dire que $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$.
Mais cela pose 2 questions : est-on sûr que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un évènement, qu'on peut en calculer la

probabilité, et ensuite, comment justifier ce passage à la limite ?

15.2 Espaces probabilisés

15.2.1 Tribus évènements

Soit Ω un ensemble, appelé univers.

Définition 15.2.1 .

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est à dire que les éléments de $\mathcal{A}$ sont des sous-ensembles de Ω.
On dira que $\mathcal{A}$ est une ***tribu*** *sur Ω si et seulement si $\mathcal{A}$ vérifie les axiomes suivants :*

- *P1 : $\Omega \in \mathcal{A}$*
- *P2 : si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ (on dit que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable)*
- *P3 : $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (on dit que $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire)*

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un ***espace probabilisable****.*
Un élément de $\mathcal{A}$ est appelé ***évènement****.*
Un élément de Ω est appelé ***épreuve****.*

Conséquence 15.2.2 .

- *P4 : $\emptyset \in \mathcal{A}$*
- *P5 : si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ (on dit que $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable)*
- *P6 : toute réunion finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$*
  toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$

En effet : P4 : c'est P3 appliqué à Ω
P5 : Car $(\bigcap A_i)^c = \bigcup (A_i^c)$ (à redémontrer).
Or $A_i \in \mathcal{A}$, donc $A_i^c \in \mathcal{A}$. Mais alors P2 entraîne $\bigcup\limits_{i\in I} A_i^c \in \mathcal{A}$, i.e. $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)^c \in \mathcal{A}$, et donc, grace à P3, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$
P6 : Soit $A_1, ..., A_n$ une suite finie d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors on définit la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en prenant $\forall k \geqslant n+1,\ A_k = \emptyset$ et on applique P2, avec $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$.
Pour l'intersection, on peut compléter la famille finie en posant pour $k \geqslant n+1,\ A_k = \Omega$.

Définition 15.2.3 .

- *A^c est appelé* ***évènement contraire*** *de A.*
- *A et B sont dits* ***incompatibles*** *ou* ***disjoints*** *ssi $A \cap B = \emptyset$*

Exemple 15.2.4 *$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est clairement une tribu sur Ω appelée tribu grossière.*

Cette tribu n'a pas grand intérêt car alors, les seuls évènement sont l'évènement certain Ω et l'évènement impossible $\emptyset$.

Exemple 15.2.5 *$\mathcal{P}(\Omega)$ est clairement une tribu. Dans le cas où Ω est fini ou dénombrable, on travaillera souvent avec cette tribu.*
Mais si Ω n'est ni fini ni dénombrable, alors, pour des raisons mathématiques, cette tribu est "trop grosse".

Exemple 15.2.6 *Soit $A \subset \Omega$ avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$. Alors $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ est une tribu. C'est la plus petite tribu contenant A*

Proposition 15.2.7 .

Une intersection de tribus sur Ω est encore une tribu sur Ω.

En effet, Notons $\mathcal{A}$ cette intersection des tribus $(\mathcal{T}_j)_{j\in J}$: $\mathcal{A} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_j$.

Toute tribu contenant Ω , alors $\Omega \in \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_j = \mathcal{A}$.

Soit $A \in \mathcal{A}$, alors $\forall j \in J,\ A \in \mathcal{T}_j$. $\mathcal{T}_j$ étant une tribu, alors $A^c \in \mathcal{T}_j$ et ceci $\forall j \in J$. Donc $A^c \in \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_j = \mathcal{A}$.

Enfin, Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors, $\forall \mathcal{T}_j$, $(A_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}_j$ et ceci pour tout $j \in J$, d'où $\forall j \in J$, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_j$ et donc $\bigcup_{i\in I} A_i \in \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_j = \mathcal{A}$.

Exemple 15.2.8 *Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On considère l'ensemble des tribus sur Ω contenant $\mathcal{B}$. L'intersection de toutes ces tribus est une tribu appelée tribu engendrée par $\mathcal{B}$. C'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{B}$*

En effet, Notons $\mathcal{A}$ cette intersection de toute les tribus contenant $\mathcal{B}$: $\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{B}\subset\mathcal{T}} \mathcal{T}$.

Toute tribu contenant $\mathcal{B}$ est une tribu, donc $\bigcap_{\mathcal{B}\subset\mathcal{T}} \mathcal{T} = \mathcal{A}$ est une tribu et cette tribu contient $\mathcal{B}$.

Par construction, c'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{B}$.

Exemple 15.2.9 *On appelle tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ la tribu engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$ (pas simple à visualiser, mais essentielle lorsqu'on étudie les probabilités sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas dénombrable, donc notion hors programme).*

15.2.2 Probabilités - espaces probabilisés

Définition 15.2.10 .

$(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
*On appelle **probabilité sur** $\mathcal{A}$ (ou mesure de probabilité) sur $\mathcal{A}$ toute application*

$$P : \begin{cases} \mathcal{A} & \to & \mathbb{R} \\ A & \to & P(A) \end{cases} \quad \textit{telle que :}$$

1. $P(\Omega) = 1$
2. *P est à valeurs positives*
3. *$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $\mathcal{A}$, telle que $\forall i,j,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$*
   alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ (on dit que P est $\sigma-$additive)

*On appelle **espace probabilisé** tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable, et P une probabilité sur $\mathcal{A}$.*

Remarque 15.2.11 *L'axiome de $\sigma-$additivité sous entend que la série $\sum_n P(A_n)$ converge dans le cas où les A_n sont disjoints 2 à 2 (ou 2 à 2 incompatibles)*

Remarque 15.2.12 *Si les évènements A_i ne sont pas deux à deux disjoints, il se peut que la série de terme général $P(A_n)$ diverge, voir par exemple le cas où tous les A_n sont égaux à un même évènement A de probabilité non nulle. Dans ce cas on notera $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$*

Proposition 15.2.13 *Propriétés élémentaires*

4. $P(\emptyset) = 0$
5. *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont n évènements 2 à 2 incompatibles, alors*
   $P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$
   En particulier, si A et B sont incompatibles, alors $P(A\cup B) = P(A)+P(B)$
6. $P(A^c) = 1 - P(A)$
7. $\forall A \in \mathcal{A},\ P(A) \in [0,1]$
8. *A et B deux évènements quelconques,*
   alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
9. *$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$ et $P(B\backslash A) = P(B) - P(A)$*

En effet

4. Il suffit de prendre la suite (A_n) définie par $A_n = \emptyset$, alors les A_n sont deux à deux disjoints et de réunion $\emptyset$ d'où $\sum_n P(\emptyset)$ converge. Or c'est une série de termes constants, donc $P(\emptyset) = 0$.

5. Ici on prend la suite (A_n) définie par $A_k = \emptyset$ pour $k \geqslant n+1$ puis P4 et def 2.
6. $A \cup A^c = \Omega$ et $A \cap A^c = \emptyset$, donc A et A^c sont incompatibles, et on applique alors la propriété P5.
7. pour tout A, $P(A) = 1 - P(A^c)$, avec $P(A)$ et $P(A^c)$ positifs (P2).
8. $A \cup B = A \cup (B \backslash (A \cap B))$ et ensuite $B = (B \backslash A \cap B) \cup (A \cap B)$ où $B \backslash A \cap B$ et $A \cap B$ sont incompatibles. On utilise alors deux fois la propriété P5.
9. $A \subset B \Longrightarrow B = A \cup (B \backslash A)$ évènements qui sont incompatibles, et donc, $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$ donc $P(B) \geqslant P(A)$.

15.2.3 Probabilité dans le cas particulier où Ω est fini ou dénombrable, et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu sur Ω et P une probabilité sur $\mathcal{A}$.
Pour $\omega \in \Omega$, notons $A_\omega = \{\omega\}$ et $p_\omega = P(A_\omega) = P(\{\omega\})$.
$\forall \omega, \omega', \omega \neq \omega' \Longrightarrow A_\omega \cap A_{\omega'} = \emptyset$, donc les A_ω sont 2 à 2 incompatibles et de réunion Ω.
$\Omega = \bigcup\limits_{\omega \in \Omega} A_\omega$ et cette réunion est dénombrable.
Alors $P(\Omega) = P\left(\bigcup\limits_{\omega \in \Omega} A_\omega\right) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} P(A_\omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.
Donc $\{p_\omega / \omega \in \Omega\}$ est une famille sommable de réels positifs et de somme 1.

Réciproquement : Soit $(q_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille de réels positifs sommables de somme 1.

Soit P : $\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ A & \rightarrow & P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} q_\omega \end{array}\right.$ Montrons que P est une probabilité.

$\{q\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est sommable sur Ω donc sur $A \subset \Omega$, donc $\sum\limits_{\omega \in A} q_\omega$ existe, P est bien définie.
Or $\forall \omega \in \Omega,\ q_\omega \geqslant 0$, donc $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) \geqslant 0$.
$P(\Omega) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} q_\omega = 1$ (hypothèse sur les $q\omega$).

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ avec les A_j disjoints 2 à 2, et soit $B = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$. Les A_k constituent une partition de B. Or la famille $\{q_\omega\}$ est sommable sur Ω donc aussi sur $B \subset \Omega$. Alors, par le théorème de sommation par paquets, cette famille est sommable sur tous les A_k et la série des sommes sur les A_k converge, i.e. $\forall k \in \mathbb{N},\ \{q_\omega\}_{\omega \in A_k}$ sommable, et sa somme vaut par définition $P(A_k)$; de plus $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = \sum\limits_{\omega \in B} q_\omega = P(B) = P(\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k)$ ce qui achève de montrer que P est une probabilité.
Donc

Théorème 15.2.14 .

Si Ω est fini ou dénombrable, et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ s'identifie via la formule $p(\{\omega\}) = p_\omega$ à une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommables de somme 1, en posant $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$.

Exemple 15.2.15 *Soit $p \in]0,1[$ et $\Omega = \mathbb{N}^*$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(\{n\}) = \lambda p^n$. Déterminer λ en sorte que P ainsi définie soit une probabilité.*

Vu le théorème, P permet de définir une probabilité ssi la famille $(\lambda p^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable de somme 1.
Or $0 < p < 1 \Longrightarrow \sum p^n$ converge (c'est une famille de réels positifs, c'est donc équivalent à dire que la famille est sommable) et $\sum_{n\geqslant 1} p^n = \dfrac{p}{1-p}$.
P est donc une probabilité ssi $\lambda = \dfrac{1-p}{p}$ et donc $\forall n \geqslant 1,\ P(\{n\}) = (1-p)p^{n-1}$. on reverra cette probabilité plus tard.

Exemple 15.2.16 *ici $\Omega = \mathbb{N}$ et soit $\theta > 0$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $P(\{n\}) = \lambda \dfrac{\theta^n}{n!}$. Déterminer λ en sorte que P ainsi définie soit une probabilité.*

Un rapide calcul montre que $\lambda = e^{-\theta}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{n\}) = e^{-\theta}\dfrac{\theta^n}{n!}$. Cette probabilité, qu'on reverra plus tard se nomme loi de Poisson de paramètre θ

15.2.4 Continuité croissante ou décroissante d'évènements

Théorème 15.2.17 .

1. *$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements croissante pour l'inclusion i.e. $\forall n,\ A_n \subset A_{n+1}$.*
   Alors $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$
2. *$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements décroissante pour l'inclusion i.e. $\forall n,\ A_{n+1} \subset A_n$.*
   Alors $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

En effet :

1. $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{+\infty}(A_k\backslash A_{k-1})\right)$. Or les $A_k\backslash A_{k-1}$ sont disjoints 2 à 2, et disjoints avec A_0.
   Donc $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P(A_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k\backslash A_{k-1}) = P(A_0) + \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} P(A_k\backslash A_{k-1}) = \lim_n P(A_n)$

2. Remarquons que la suite $(A_0\backslash A_k)$ est croissante pour l'inclusion.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_0\backslash A_n) = P\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}(A_0\backslash A_k)\right)$ en vertu de la première partie, démontrée, de ce théorème.
Le membre de gauche vaut $\lim\limits_{n}(P(A_0) - P(A_n))$ car $A_n \subset A_0$, et donc
$\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_0\backslash A_n) = P(A_0) - \lim\limits_{n} P(A_n)$ **(1)**.
Or on montre par double inclusion (à faire) que : $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}(A_0\backslash A_k) = A_0\backslash \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.
De plus $\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k \subset A_0$ donc $P(A_0\backslash \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k) = P(A_0) - P(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k)$ **(2)**.
(1) et **(2)** permettent de conclure.

Proposition 15.2.18 .

Pour toute suite d'évènements (A_n) on a : $P(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ (en convenant que si $\sum P(A_n)$ diverge alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$)

En effet :
$\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n = A_0 \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\backslash \bigcup\limits_{k=0}^{n-1}(A_k \cap A_n)\right))$ et tous les évènements de la réunion du second membre sont incompatibles, et $A_n\backslash \bigcup\limits_{k=0}^{n-1}(A_k \cap A_n) \subset A_n$.
Donc $P(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) = P(A_0) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P\left(A_n\backslash \bigcup\limits_{k=0}^{n-1}(A_k \cap A_n)\right)) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

15.2.5 Évènements négligeables, presques sûrs

Définition 15.2.19 .

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$.

1. *On dira que A est **négligeable** si et seulement sa probabilité est nulle :*
A négligeable $\iff P(A) = 0$
2. *On dira qu'un évènement A est **presque sûr** si et seulement si sa probabilité est égale à 1 :*
A est presque sûr $\iff P(A) = 1$.

Proposition 15.2.20 .

Une réunion finie ou dénombrable d'évènements négligeables est négligeable.
Une intersection finie ou dénombrable d'évènements presque sûrs est presque sûre.

En effet : * On a vu que $P(\bigcup\limits_{n} A_n) \leqslant \sum\limits_{n} P(A_n)$. Or si tous les A_n sont négligeables, alors $P(A_n) = 0$ pour tout n, et donc la somme de la série est nulle, et donc $P(\bigcup\limits_{n} A_n)$ est nulle aussi.

* Si $\forall n,\ P(B_n) = 1$ alors $P(B_n^c) = 0$ et $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n^c) = 0$ (vu au dessus)

Or $\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n = \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n^c\right)^c$. Donc $P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n) = 1$.

15.3 Probabilités conditionnelles

15.3.1 Définition

Supposons que les faces paires d'un dé à 6 faces soient blanches et les faces impaires soient noires. On lance ce dé. De loin on voit que la face du dessus est blanche ; quelle est la probabilité que ce soit un 6 ? Tout le monde répondra 1/3 et non pas 1/6. L'information sur la couleur de la face du dessus a modifié la manière de calculer les probabilités des évènements élémentaires. Sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on attribue la probabilité 0 aux évènements élémentaires $\{1\},\ \{3\}, \{5\}$ et 1/3 aux évènements $\{2\},\ \{4\}, \{6\}$.
Si on note A l'évènement "la face du dessus est blanche", on définit une nouvelle probabilité notée P_A ou $P(\cdot|A)$ définie par :

$$P(\{i\}|A) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } i = 2,4,6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{ce qui revient à dire que } P(\{i\}|A) = \frac{P(\{i\} \cap A)}{P(A)}$$

Définition-théorème 15.3.1 .

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et soit A un évènement de probabilité non nulle.
Pour tout évènement B de $\mathcal{A}$ on pose $P(B|A) = P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
P_A est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, appelée probabilité conditionnelle relative à A (ou probabilité sachant A)

En effet :
- P_A est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}_+$ car :
  $\forall B \in \mathcal{A},\ A \cap B \in \mathcal{A}$ et donc $P(A \cap B)$ existe, et donc $P_A(B)$ existe et est positif.
- $P_A(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$
- Soit (B_n) une suite d'évènements disjoints 2 à 2. Alors
  $$P_A(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n) = \frac{P\left(A \cap (\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n)\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(A \cap B_n)\right)}{P(A)}$$
  Or $(A \cap B_n)$ est une suite d'évènements disjoints 2 à 2, donc :
  $P_A(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n) = \dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A \cap B_n)}{P(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_A(B_n)$ et donc P_A est bien une mesure de probabilité.

Proposition 15.3.2 .

Soit A et B évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
Alors $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$

Clair : il suffit décrire les définitions des deux probabilités conditionnelles.

Proposition 15.3.3 .

A et B deux évènement de $\mathcal{A}$, tels que $P(A) \neq 0$
- *$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(B|A) = 0$*
- *$A \subset B \Longrightarrow P(B|A) = 1$*

Clair en revenant à la définition.

15.3.2 Formule des probabilités totales et composées (aussi appelée formule de l'intersection).

Définition 15.3.4 .

Système complet d'évènements
On dit qu'une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements est un système complet d'évènements si et seulement si :

1. *les évènements sont 2 à 2 disjoints i.e. $i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$*
2. $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$

En langage ensembliste, c'est donc une partition dénombrable de Ω en éléments de $\mathcal{A}$

Remarque 15.3.5 *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements de Ω alors* $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$

Théorème 15.3.6 .

Formule des probabilités totales
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements tous de probabilité non nulle. Alors pour tout évènement B on a :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$$

En effet : $\Omega = \bigcup_n A_n$. Alors $P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (\bigcup_n A_n)) = P(\bigcup_n (B \cap A_n))$ Or les A_n sont 2 à 2 disjoints, donc les $B \cap A_n$ sont aussi 2 à 2 disjoints.
D'où $P(B) = \sum_n P(B \cap A_n) = \sum_n P(B|A_n)P(A_n)$ Conséquence :

Théorème 15.3.7 ***Formule de Bayes***

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements, tous de probabilité non nulle et B un évènement de probabilité non nulle. Alors pour tout entier k,

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_n P(B|A_n)P(A_n)}$$

Car $P(A_k|B) = \dfrac{P(B\cap A_k)}{P(B)} = \dfrac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)}$.

Remarque 15.3.8 *Cette formule s'appelle aussi formule de probabilité des causes. En effet, si les évènements A_k sont appelés causes, alors $P(A_k|B)$ est la probabilité que, sachant que B est réalisé, ce soit A_k qui en soit la cause.*

Remarque 15.3.9 *Ces deux théorèmes restent vrais si, au lieu d'une famille dénombrable formant un système complet d'évènements on a une famille finie formant un système complet d'évènements : les démonstrations sont identiques. Dans ce cas, dans les deux théorèmes les séries seront remplacées par des sommes finies.*

Exercice 15.3.10 *Dans une ville, deux compagnies de taxis opèrent : les Verts, qui représentent 85% de la flotte totale, et les Bleus, qui ont les 15% restants. Un accident survient la nuit et le véhicule impliqué quitte la scène. Un témoin affirme qu'il s'agissait d'un taxi Bleu. Quelle est la probabilité que le taxi responsable soit effectivement un Bleu, sachant que la fiabilité des témoignages dans des conditions analogues à celles prévalant lors de l'accident est évaluée à 80% (les témoins identifient correctement la couleur du taxi dans 80% des cas, et se trompent dans 20%) ? (Roch Ouellet)*

Prenons $\Omega = \{b, v\} \times \{b, v\}$. Le premier élément de chaque couple indiquant la couleur du taxi causant l'accident, et le second élément du couple, la couleur annoncée par le témoin.
Notons B l'évènement : c'est un taxi bleu qui a causé l'accident, alors $B = \{b\} \times \{b, v\}$
Notons V l'évènement : c'est un taxi vert qui a causé l'accident, alors $V = \{v\} \times \{b, v\}$
Notons Tb l'évènement : le témoin a vu une voiture bleue, alors $Tb = \{b, v\} \times \{b\}$.
On sait que $P(B) = 0,15$, $P(V) = 0,85$ et $P(Tb|B) = 0,8$ et $P(Tb|V) = 0,2$.
On demande $P(B|Tb)$. Terminer la résolution.

Exemple 15.3.11 *On dispose de N urnes U_1, $U_2, ..., U_N$. Pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant N$, l'urne U_i contient b_i boules blanches et r_i boules rouges. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne. Montrons que la probabilité d'obtenir une boule blanche vaut* $\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{b_i}{r_i+b_i}$

On pourra commencer par prendre $\Omega = [\![1, N]\!] \times \{b, r\}$

Théorème 15.3.12 ***Formule des probabilités composées***

Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une famille d'évènements telle que* $P(A_1\cap ...\cap A_{n-1})\neq 0$. *Alors*

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &= P(A_1)P(A_2|A_1)...P(A_n|A_1\cap A_2\cap ...\cap A_{n-1}) \\ &= P(A_1)\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}\frac{P(A_3\cap A_2\cap A_1)}{P(A_2\cap A_1)}...\frac{P(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n)}{P(A_1\cap ...\cap A_{n-1})} \end{aligned}$$

En effet, Pour $1\leqslant j\leqslant n-1$, $A_1\cap ...\cap A_{n-1}\subset A_1\cap ...\cap A_j$ et donc, toutes les probabilités intervenant dans ce théorème ont bien un sens, car les probabilités des intersections $A_1\cap ...\cap A_j$ sont toutes non nulles. .
La démonstration se fait alors simplement en partant de la seconde ligne (à faire)

Exemple 15.3.13 *On dispose de n clés pour ouvrir une porte. On les essaye à tour de rôle, en les mettant de côté après essai. Quelle est la probabilité que la porte s'ouvre au kième essai ?*

15.4 Évènements indépendants.

15.4.1 Couples d'évènements indépendants.

Soient A et B deux évènements de probabilité non nulle. En général, $P(A|B)$ est différent de $P(A)$. Intuitivement, A est indépendant de B lorsque la probabilité de A est la même que l'on sache que B est réalisé on non, c'est à dire lorsque $P(A|B)=P(A)$, i.e. $P(A\cap B)=P(A)P(B)$
Remarquons que cette dernière égalité a encore un sens si $P(A)=0$ ou $P(B)=0$.
Remarquons aussi que cette dernière écriture est symétrique, donc si A est indépendant de B alors B est indépendant de A.
Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 15.4.1 ***Evènements indépendants***

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *un espace probabilisé.*
On dit que deux évènements A *et* B *sont indépendants pour la probabilité* P *lorsque :* $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

Remarque 15.4.2 A *et* B *des évènements de probabilités non nulles.* A *et* B *disjoints entraîne* A *et* B *ne sont pas indépendants.*

Clair.

Exemple 15.4.3 *On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. On note D l'évènement "la carte tirée est une Dame", et T l'évènement "la carte tirée est un Trèfle".*
Ces deux évènements sont-ils indépendants ?

Proposition 15.4.4 .

Soit $A,\ B\in\mathcal{A}$
- A *et* B *sont indépendants* $\iff$ A *et* B^c *sont indépendants.*
- *Si* $P(A)=1$ *ou* $P(A)=0$ *alors tout évènement* B *est indépendant de* A
- *Si* (A_n) *est une suite d'évènements 2 à 2 incompatibles et si pour tout* n, B *est indépendant de* A_n *alors* B *est indépendant de* $\bigcup_n A_n$

En effet :

— $P(A\cap B^c) = P(A|(A\cap B)) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1-P(B)) = P(A)P(B^c)$ donc A et B^c sont indépendants. L'implication directe est donc prouvée.
Pour la réciproque, appliquons cette implication, prouvée, à A et B^c. A et B^c indépendants $\Longrightarrow$ A et $(B^c)^c$ sont indépendants, ce qui prouve la réciproque.

— Supposons $P(A) = 0$. Vu que $A\cap B \subset A$ alors $P(A\cap B) = 0 = P(A)P(B)$
Si $P(A) = 1$ alors $P(A^c) = 0$, donc B et A^c sont indépendants, donc A et B sont indépendants.

— Car les A_n étant incompatibles 2 à 2 alors les $B\cap A_n$ sont incompatibles 2 à 2.

$$\begin{aligned}
P(B\cap(\bigcup_n A_n)) &= P(\bigcup_n (B\cap A_n)) = \sum_n P(B\cap A_n) \qquad (1)\\
&= \sum_n P(B)P(A_n) = P(B)\sum_n P(A_n)\\
&= P(B)P(\bigcup_n A_n) \qquad (2)
\end{aligned}$$

(on justifiera la dernière égalité de (1) et l'égalité (2))

Conséquence 15.4.5 *A et B indépendants $\Longleftrightarrow$ A et B^c indépendants $\Longleftrightarrow$ A^c et B indépendants $\Longleftrightarrow$ A^c et B^c indépendants.*

15.4.2 Familles d'évènements mutuellement indépendants.

Définition 15.4.6 *Évènements mutuellement indépendants*

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements. On dit que les évènements sont mutuellement indépendants si et seulement si, pour toute suite finie $A_{i_1},..,A_{i_n}$ d'évènements distincts on a :

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}) = P(A_{i_1})...P(A_{i_n})$$

Remarque 15.4.7 *Si n évènements sont mutuellement indépendants, alors ils sont 2 à 2 indépendants. Mais la réciproque est fausse : des évènements 2 à 2 indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants.*

Exemple 15.4.8 *Traduire le fait que les 3 évènements A, B et C sont mutuellement indépendants.*

Exemple 15.4.9

On lance deux fois un dé cubique parfait. On considère les évènements suivants :
A : le premier nombre obtenu est pair
B : le second nombre obtenu est impair
C : la somme des 2 nombres obtenus est paire.
Montrons que ces évènements sont 2 à 2 indépendants.
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ et Card $\Omega = 36$.
$A = \{2,4,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$ et donc $P(A) = \dfrac{3\times 6}{36} = \dfrac{1}{2}$

$B = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,3,5\}$ et donc $P(B) = \dfrac{6 \times 3}{36} = \dfrac{1}{2}$
$C = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} \times \{1,3,5\}$ et donc $P(C) = \dfrac{3 \times 3 + 3 \times 3}{36} = \dfrac{1}{2}$
$A \cap B = \{2,4,6\} \times \{1,3,5\}$ et donc $P(A \cap B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = P(A)P(B)$
$A \cap C = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}$ et donc $P(A \cap C) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = P(A)P(C)$
$B \cap C = \{1,3,5\} \times \{1,3,5\}$ et donc $P(B \cap C) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = P(B)P(C)$
Donc ces 3 évènements sont deux à deux indépendants.
Mais $A \cap B \cap C = \emptyset$ et donc $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$: ces 3 évènements ne sont pas mutuellement indépendants.

Chapitre 16

Variables aléatoires discrètes

Contents

16.1 Variables aléatoires discrètes.

16.1.1 Préliminaires : rappel sur les images réciproques.

Définition 16.1.1 *Soit $X : E \to F$ une application.*
Pour $B \subset F$ (ou $B \in \mathcal{P}(F)$) l'image réciproque de B par X est par définition le sous ensemble de E noté $X^{-1}(B) = \{e \in E / X(e) \in B\}$

Exemple 16.1.2 — *Pour $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \to x^2$. Donner $X^{-1}([1,4])$*
— *$X = \sin$. Déterminer $X^{-1}([0,1])$*

Proposition 16.1.3 *Avec les mêmes notations*

1. $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
2. $X^{-1}(F) = E$
3. $A = X^{-1}(B) \nRightarrow X(A) = B$
   En fait, $A = X^{-1}(B) \Rightarrow X(A) \subset B$
4. $B \subset F$, $X^{-1}(B^c) = (X^{-1}(B))^c$
5. $X^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} X^{-1}(B_i)$

6. $X^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} X^{-1}(B_i)$

Pour 3) : $X : x \to x^2$. Alors $X^{-1}([-4,4]) = [-2,2]$, mais $X([-2,2]) = [0,4] \subsetneq [-4,4]$
Démontrons 6) (faire les autres)
$e \in X^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) \iff X(e) \in \bigcap_{i\in I} B_i \iff \forall i \in I,\ X(e) \in B_i \iff \forall i \in I,\ e \in X^{-1}(B_i)$
$\iff e \in \bigcap_{i\in I} X^{-1}(B_i)$

16.1.2 Variables aléatoires.

En fait, définir l'ensemble Ω de tous les résultats possibles de l'expérience peut être compliqué. Dans la pratique, ce qui nous intéresse quand on a une expérience aléatoire, c'est de quantifier certaines valeurs qui dépendent de l'expérience.

Pour $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ donné, une variable aléatoire est une fonction $X : \Omega \to F$, $\omega \to X(\omega)$.

Par exemple, lors d'un lancer de pièces, ce qui va nous intéresser ce peut être le nombre de Piles. Lors du tirage de boules dans une urne, on va s'intéresser au nombre de boules d'une certaine sorte.
En fait, très souvent, ce n'est pas l'expérience aléatoire qui nous importe, mais certaines valeurs liées à cette expérience quantifiable.
Cette approche est très féconde.

Remarque 16.1.4 *Mauvais choix de vocabulaire : une variable aléatoire n'est pas une variable, mais c'est une fonction.*

L'énorme intérêt de cette approche c'est que pour X variable aléatoire, l'espace $X(\Omega)$ est connu et simple (sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^d$ ou de $\mathbb{Z}$) alors que Ω est un ensemble souvent difficile à décrire, voire très abstrait.

Plutôt que de travailler sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on va s'intéresser à la probabilité que certaines valeurs de X soient réalisées.

Notation 16.1.5 *Pour $B \subset F$ on notera $(X \in B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)$.*

La définition d'une variable aléatoire ci-dessus n'est pas complète. En effet, pour que $P(X \in B)$ ait un sens il est nécessaire que $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposition 16.1.6 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to F$.*
Notons $F = X(\Omega)$. L'ensemble $\mathcal{B}$ des parties B de F telles que $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ est une tribu sur F.

En effet
· $X^{-1}(F) = \Omega \in \mathcal{A}$ donc $F \in \mathcal{B}$
· Si $B \in \mathcal{B}$ alors $X^{-1}(B^c) = (X^{-1}(B))^c \in \mathcal{A}$ donc $B^c \in \mathcal{B}$.
· Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$. Alors $X^{-1}(\bigcup_n B_n) = \bigcup_n X^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ et donc $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}$.
Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 16.1.7 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(F, \mathcal{B})$ un espace probabilisable.*
Une variable aléatoire X de Ω dans F est une application $X : \Omega \to F$ telle que

$$\forall B \in \mathcal{B},\ X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

16.1.3 Variables aléatoires discrètes.

On se limitera cette année au cas où l'espace image $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. Dans ce cas, la tribu sur $X(\Omega)$ est $\mathcal{P}(X(\Omega))$.

Définition 16.1.8 *Soit F un ensemble et $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.*
*On appelle **variable aléatoire discrète** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application X de Ω dans F telle que :*
- *$X(\Omega)$ est fini ou dénombrable*
- *$\forall x \in X(\Omega),\ X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$*

*Si $X(\Omega)$ est fini on dit que X est une **variable aléatoire finie***
*Si $X(\Omega)$ est infini et dénombrable on dit que X est une **variable aléatoire discrète infinie***
*Si F est une partie de $\mathbb{R}$ on dit que la **variable aléatoire discrète X est réelle**.*

Notation 16.1.9 • *Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour $B \subset X(\Omega)$ l'ensemble $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\}$ se note $(X \in B)$. Donc $(X \subset B) = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\}$.*
• *D'où, pour $x \in F$, $(X = \{x\}) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$. Pour alléger les notations cet ensemble se notera $(X = x) = X^{-1}(\{x\})$*
• *De même si X est une variable aléatoire réelle on note $(X \leqslant x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leqslant x\}$*

Proposition 16.1.10 *Les évènements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ forment un système complet d'évènements de Ω.*

car ...

Proposition 16.1.11 *Soit X une variable aléatoire discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $Y = f \circ X$ est une variable aléatoire discrète réelle, notée $f(X)$.*

En effet, $X(\Omega)$ étant au plus dénombrable, alors $Y(\Omega)$ aussi.
Soit $y \in Y(\Omega)$, alors
$$(Y = y) = \{\omega \in \Omega / f(X(\omega)) = y\} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})\} = \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} (X = x)$$
Or $f^{-1}(\{y\})$ est une partie de $X(\Omega)$ donc, est au plus dénombrable, alors $(Y = y)$ est une réunion au plus dénombrable d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$, c'est donc un évènement.

Remarque 16.1.12 *En particulier si X est une variable aléatoire réelle discrète, la fonction X^2 est aussi une variable aléatoire, de même que $2X + 3$ ou e^X ou $|X|$. .*

16.1.4 Loi d'une variable aléatoire discrète.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète définie sur Ω. On sait donc que $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Définition 16.1.13 *Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On définit la fonction P_X sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ par*

$$P_X : \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to [0, 1] \\ B & \to P_X(B) = P(X \in B) \end{cases}$$

Cette application est appelée loi de probabilité de X. C'est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

En effet :
- $P_X(X(\Omega)) = P(X^{-1}(X(\Omega))) = P(\Omega) = 1$
- Pour $B \in \mathcal{P}(X(\Omega))$, $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \in [0,1]$.
- Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(X(\Omega))^{\mathbb{N}}$ avec les B_n deux à deux disjoints.
  $P_X(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(X^{-1}(B_n)\right)\right)$
  Les ensembles $X^{-1}(B_n)$ sont deux à deux disjoints, car les B_n sont deux à deux disjoints.
  Donc $P_X(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X^{-1}(B_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_X(B_n)$.

Remarque 16.1.14 *En pratique, P_X est plus facile à caractériser que P car $F = X(\Omega)$ est connu et simple. C'est ça qui fait l'intérêt de cette approche en loi.*

Conséquence 16.1.15 ***Important*** *:*
Pour déterminer la loi de X on détermine les valeurs x_i susceptibles d'être prises par X puis les probabilités $p_i = P(X = x_i)$.

Conséquence 16.1.16 *Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω et notons $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ avec I au plus dénombrable et les x_i deux à deux distincts*
Alors $\forall i \in I, p_i \geqslant 0$ et $\sum_{i\in I} p_i = 1$ où $p_i = P(X = x_i)$

Notation 16.1.17 *La mesure de probabilité P_X ainsi définie, appelée loi de X est aussi notée $\mathcal{L}(X)$.*
Si X a une loi de probabilité $\mathcal{L}$ on écrira $X \sim \mathcal{L}$
Si deux variables aléatoires X et Y suivent la même loi, on notera $X \sim Y$

Exemple 16.1.18 *On lance deux fois un dé parfait. On note X la somme des résultats obtenus. Quelle est la loi de X ?*

Ici $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ et $X(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$
L'évènement $(X = 4)$ se produit ssi $\omega \in \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$. Chacun des couples est de probabilité $\frac{1}{36}$ donc $P(X = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
En raisonnant de la même manière on obtient la loi de X, présentée dans le tableau ci dessous :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

et par exemple, $(X = 8) = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

Exemple 16.1.19 *On lance un dé autant de fois que nécessaire. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois le chiffre 6. Donner la loi de X*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $p_n = P(X = n)$. Notons S_k l'évènement : le kième lancer donne 6, et N_k l'évènement : le kième lancer ne donne pas le chiffre 6 ($N_k = S_k^c$). Pour tout i, $P(S_i) = \frac{1}{6}$ et $P(N_i) = \frac{5}{6}$.
Les lancers sont indépendants, donc les S_i et les N_j sont indépendants.
$P(X = 1) = P(S_1) = \frac{1}{6}$
$P(X = 2) = P(N_1 \cap S_2) = P(N_1)P(S_2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6^2}$
$\vdots$
$P(X = n) = P(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_{n-1} \cap S_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = \frac{5^{n-1}}{6^n}$
Remarquons que $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1$. Donc la probabilité que $X = +\infty$, c'est à dire que le la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est nulle.
On reverra cette loi de probabilité plus tard.

Remarque 16.1.20 *Deux variables aléatoires distinctes peuvent avoir la même loi. La connaissance de la loi ne permet pas de reconstituer la variable aléatoire.*

Par exemple, dans l'exemple ci-dessus, notons Y le nombre de lancers nécessaires jusqu'à l'apparition du chiffre 3. X et Y ont la même loi. Mais la connaissance de cette loi ne permet pas de retrouver la variable aléatoire : si on sait qu'une var a cette même loi, rien ne permet de dire si $Z = X$ ou $Z = Y$ ou Z est une autre variable aléatoire.

16.2 Lois usuelles.

16.2.1 Rappels : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale

Définition 16.2.1 *Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal n.*
Notons $X(\Omega) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ où les a_k sont distincts 2 à 2.
*X soit une **loi uniforme** sur $(X(\Omega))$ si et seulement si*

$$\forall k \in \{1, .., n\}, \forall i \in \{1, .., n\},\ P(X = a_k) = P(X = a_i)$$

Dans ce cas, $\forall k \in \{1, 2, .., n\}$, $P(X = a_k) = \frac{1}{n}$
X soit une loi uniforme sur un ensemble de cardinal n se notera $X \sim U_n$ ou $\mathcal{L}(X) = U_n$.

L'exemple type d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme est celui où X désigne le résultat d'un lancer de dé.

Définition 16.2.2 *X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** p ssi $X(\Omega)$ est de cardinal 2, en général $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$ et donc $P(X = 0) = 1 - p = q$*
X soit une loi de Bernoulli de paramètre p se notera $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ (voir Binomiale)

L'exemple type d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli est celui d'une expérience à 2 issues, le succès ($X = 1$) et l'échec ($X = 0$). Le paramètre p est la probabilité du succès de l'expérience.

Définition 16.2.3 *X suit une* ***loi binomiale*** $\mathcal{B}(n,p)$ ***de paramètres*** n ***et*** p *avec* $0 < p < 1$ *si et seulement si :*

$$X(\Omega) = \{0, 1, .., n\} \text{ et } \forall k \in [[0, n]],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

X suit une loi binomiale de paramètres n et p se notera $X \sim \mathcal{B}(n,p)$

C'est bien une loi car en utilisant la formule du binôme,
$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$
Le schéma d'une expérience débouchant sur une loi binomiale : on considère une expérience pouvant déboucher soit sur un succès avec la probabilité p, soit sur un échec. On répète n fois cette expérience, les expériences étant indépendantes. X désignera le nombre de succès. Alors $X \sim B(n,p)$
Par exemple, un lancer de dé n fois, avec X la variable aléatoire décomptant le nombre de "5" sortis.
Alors $X \sim \mathcal{B}(n, 1/6)$

Remarquons qu'une loi binomiale de paramètre 1 et p est en fait une loi de Bernoulli, ce qui justifie la notation $\mathcal{B}(1,p)$ pour la loi de Bernoulli.

16.2.2 Loi géométrique

Définition 16.2.4 *Soit $p \in]0, 1[$*
On dit qu'une variable aléatoire X suit la ***loi géométrique de paramètre*** *p si et seulement si*

$$X(\Omega) = N^* \text{ et } \forall k \geqslant 1,\ P(X = k) = (1-p)^{k-1} p = q^{k-1} p \text{ où } q = 1 - p$$

X suit une loi géométrique de paramètre p se notera $X \sim \mathcal{G}(p)$

C'est bien une loi car :
$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p$ (Remarquons $0 < 1 - p < 1 \Longrightarrow \sum (1-p)^n$ converge).
Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = p \dfrac{1}{1 - (1-p)} = 1$
Le schéma d'une expérience débouchant sur une loi géométrique : on considère une expérience pouvant déboucher soit sur un succès (noté S) avec la probabilité p, soit sur un échec (avec la probabilité $q = 1 - p$). On répète cette expérience, les expériences étant indépendantes (i.e. on répète des expériences de Bernoulli jusqu'à l'apparition du premier succès). X désignera le nombre d'épreuves effectuées jusqu'au premier succès. On dit que X est le temps d'attente du premier succès.
X suit une loi géométrique : vérifions le
Soit A_k l'évènement "S est réalisé au cours de la kième épreuve". On a dit que les épreuves sont indépendantes, donc les A_k le sont aussi.
Pour $n > 1$, $P(X = n) = P(A_1^c \cap .... \cap A_{n-1}^c \cap A_n) = (1-p)^{n-1} p$ (pour $n \geqslant 2$)
$P(X = 1) = P(A_1) = p = (1-p)^0 p$. Cqfd
C'est ce qu'on avait fait dans l'exemple 16.1.4

Remarque 16.2.5 $p = P(X = 1)$

Théorème 16.2.6 *Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.*
X suit une loi géométrique si et seulement si

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^{*2}, P(X > n+k | X > n) = P(X > k) \text{ et } P(X = 1) \in]0,1[$$

Dans ce cas, le paramètre de la loi géométrique est $p = P(X = 1)$

En effet, • $P(X = 1) = p \in]0,1[$
• Supposons que X suit une loi géométrique de paramètre p. Évaluons $P(X > j)$ avec $j \in \mathbb{N}^*$.
$(X > j) = \displaystyle\bigcup_{i=j+1}^{+\infty} (X = i)$ et les évènements $(X = i)$ sont disjoints 2 à 2.
$P(X > j) = \displaystyle\sum_{i=j+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} p = p \sum_{i=j}^{+\infty} (1-p)^i$. On reconnaît le reste d'une série géométrique.
Donc $P(X > j) = p \dfrac{(1-p)^j}{1-(1-p)} = (1-p)^j$.
Alors $P(X > n+k | X > n) = \dfrac{P((X > n+k) \cap (X > n))}{P(X > n)} = \dfrac{P(X > n+k)}{P(X > n)} = \dfrac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = P(X > k)$.
• Réciproquement. Vues les hypothèses, en reprenant le calcul du dessus,
$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^{*2}, P(X > n+k | X > n) = \dfrac{P((X > n+k) \cap (X > n))}{P(X > n)} = \dfrac{P(X > n+k)}{P(X > n)} = P(X > k)$.
Donc $P(X > n+k) = P(X > n) P(X > k)$
Posons $p = P(X = 1)$, alors $p \in]0,1[$.
$P(X > 1) = 1 - P(X = 1) = 1 - p$ car P prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$
donc $P(X > 1+k) = P(X > 1) P(X > k) = (1-p) P(X > k)$.
Donc la suite $(P(X > k))_k$ est une suite géométrique de raison $(1-p)$ donc
$\exists \alpha$ tel que $P(X > k) = \alpha (1-p)^k$
Or $P(X > 1) = 1 - p$ donc $\alpha = 1$ et donc $\forall k \geqslant 1,\ P(X > k) = (1-p)^k$.
On termine en remarquant que pour $k > 1$,
$P(X = k) = P(k-1 < X \leqslant k) = P(X > k-1) - P(X > k) = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = p.(1-p)^{k-1}$
Cette formule est encore vraie pour $k = 1$ et donc, X suit effectivement une loi géométrique de paramètre $p = P(X = 1)$.

Conséquence 16.2.7 *Si X suit une loi géométrique, alors $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^{*2},\ P(X > n+k) = P(X > n) P(X > k)$*

16.2.3 Loi de Poisson

Définition 16.2.8 *Soit $\lambda > 0$.*
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ si et seulement si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } P(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

X suit une loi de Poisson de paramètre λ se notera $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

C'est bien une loi car la série $\sum \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$, ce qui était attendu.

Théorème 16.2.9 ***Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson***
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que
$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ *avec* $\lim_n np_n = \lambda > 0$.
Alors $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
Dans ce cas on dit qu'on peut approximer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = \lim_{n\to+\infty} np_n$.

En effet : $\lim_n np_n = \lambda \Longrightarrow p_n = O(\frac{\lambda}{n})$ et donc $\lim p_n = 0$.
$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$. Or $(1 - p_n)^{n-k} = e^{(n-k)\ln(1-p_n)}$.
Mais $\lim p_n = 0 \Longrightarrow (n - k)\ln(1 - p_n) \sim (n - k)(-p_n) \sim -\lambda$, donc $\lim_n (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}$
$P(X_n = k) \sim \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k e^{-\lambda} \sim \frac{e^{-\lambda}}{k!} n(n-1)...(n-k+1)p_n^k$. Or $n(n-1)...(n-k+1)p_n^k \sim n^k p_n^k$ car k est un entier fixé, donc finalement $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda}}{k!}\lambda^k$.

En pratique, on approxime souvent une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np$ lorsque n est assez grand ($n \geqslant 50$) et np pas très grand ($np \leqslant 15$).

Exemple 16.2.10 *Dans une population, la probabilité qu'une personne soit atteinte par une maladie M est de 1%. Évaluer la probabilité pour que sur un échantillon de 500 personnes il y en ait exactement 7 qui soient malades ?*

16.3 Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes

16.3.1 Introduction

Définition 16.3.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω*
On appelle couple (X, Y) l'application de Ω dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ (X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

Le couple (X, Y) est une variable aléatoire discrète sur Ω

En effet, l'ensemble image est inclus dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ qui est au plus dénombrable, comme produit cartésien de deux ensembles au plus dénombrables ; de plus $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $((X, Y) = (x, y)) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x \text{ et } Y(\omega) = y\} = (X = x) \cap (Y = y)$ intersection de 2 évènements de Ω, donc est dans $\mathcal{A}$.

Définition 16.3.2 *On appelle loi conjointe du couple (X, Y) la loi du couple $Z = (X, Y)$ entièrement déterminée par la donnée de $(p_{i,j})_{i\in I, j\in J}$*
où $p_{i,j} = P(Z = (x_i, y_j)) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$ et $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}$

Conséquence 16.3.3 $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} p_{i,j} = 1$

Dans le cas où X et Y sont finies, alors la loi du couple est souvent donnée sous forme d'un tableau à double entrée.

Exemple 16.3.4 *On lance un dé autant de fois que nécessaire. On note X le numéro d'apparition du premier 6, et Y le numéro d'apparition du premier 1. Déterminer la loi du couple (X, Y).*

Remarquons d'abord que X et Y ne peuvent pas prendre la même valeur.
Donc pour $n \geqslant 1$, $P((X, Y) = (n, n)) = 0$.
Justifier que pour $k < n$ alors $P((X = n) \cap (Y = k)) = \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-1}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5^{n-2}}{6^n}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$
Idem pour $k > n$ alors $P((X = n) \cap (Y = k)) = \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-n-1}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5^{k-2}}{6^k}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

16.3.2 Lois marginales

Définition 16.3.5 *Les var X et Y sont appelées variables marginales du couple (X, Y)*
La loi marginale de X est la loi de la variable aléatoire X du couple (X, Y).

Proposition 16.3.6 *Supposons connue la loi du couple (X, Y), on retrouve la loi de X en déterminant*

$$P(X = x_i) = \sum_{j\in J} p_{i,j}$$

En effet l'ensemble des $(Y = y_j)$ quand j décrit J est un système complet d'évènements. Alors la formule des probabilités totales conduit à $\forall i \in I$, $P(X = x_i) = \displaystyle\sum_{j\in J} P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j\in J} p_{i,j}$

Remarque 16.3.7 *Si la loi du couple (X, Y) est présentée dans un tableau dans lequel l'élément $p_{i,j}$ est situé ligne i colonne j, alors $P(X = x_i)$ est la somme des éléments de la ligne i, de même que $P(Y = y_j)$ est la somme des éléments de la colonne j.*

Remarque 16.3.8 *Mais la connaissance des* **lois** *de X et de Y ne suffit pas pour connaître la loi du couple (X, Y).*

En effet Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de Pile lors de 4 lancers indépendants d'une pièce, et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de Face obtenus lors de ces lancers, c'est à dire $Y = 4 - X$. Y a la même loi que X (à vérifier). Déterminons la loi du couple (X, Y) : pour $(i, j) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2$, si $j \neq 4 - i$ alors $P((X, Y) = (i, j)) = 0$, et sinon, $P(X, Y) = (i, 4 - i)) = P(X = i) = \binom{4}{i}(\frac{1}{2})^4$.
Notons $X' = X$ alors bien évidemment Y et X' ont la même loi.
Par contre la loi de (X, X') est telle que pour $(i, j) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2$,
si $i \neq j$ alors $P((X, X') = (i, j)) = 0$. Les couples (X, Y) et (X, X') n'ont pas la même loi.

Exemple 16.3.9 *Reprenons l'exemple 16.3.4*

On connaît par ailleurs la loi de X et de Y : $X \sim \mathcal{G}(1/6)$ et $Y \sim \mathcal{G}(1/6)$
Retrouver la loi de X en cherchant la loi marginale X du couple (X, Y)

16.3.3 Loi conditionnelle

Définition 16.3.10 *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = x) \neq 0$*
On note $\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y(\Omega))$. Alors l'application $\mathcal{B} \to [0,1]$ définie par $B \to P_{(X=x)}(Y \in B)$ est une probabilité sur $(Y(\Omega), \mathcal{B})$ appelée loi de Y conditionnée par $(X = x)$.

Remarque 16.3.11 *Ainsi* $P_{(X=x)}(Y = y_j) = \dfrac{P((X = x) \cap (Y = y_j))}{P(X = x)}$.

Remarque 16.3.12 $P_{(X=x)}(Y = y_j)$ *se note aussi* $P(Y = y_j | X = x)$

Exemple 16.3.13 *Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire successivement et sans remise 2 boules. On note X_1 le numéro de la première boule tirée et X_2 le numéro de la seconde. On note Y le maximum des numéros des boules 1 et 2.*
Donner la loi du couple (X_1, X_2), la loi marginale de X_2, la loi du couple (X_1, Y), la loi de Y, la loi de (X_2, Y) , et enfin la loi de X_1 sachant que $(Y = 3)$.

16.3.4 Couple de variables indépendantes

Définition 16.3.14 *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω. On dira que X et Y sont indépendantes*
$\iff \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, *les évènements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, i.e.*
$\iff \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y)$

Exemple 16.3.15 *En reprenant l'exemple 16.3.13 on constate que le couple (X_1, X_2) ne prend pas toutes les valeurs de $X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$, et donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes (ce qu'on pouvait deviner). Autre manière de voir, $P((X_1 = n) \cap (X_2 = n)) = 0 \neq P(X_1 = n)P(X_2 = n)$.*

Exemple 16.3.16 *On lance un dé autant de fois que nécessaire. On note X le numéro de la première apparition du 6. On note Y le nombre de lancers nécessaires après la première apparition du 6 pour voir apparaître un 1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*

car ...

Proposition 16.3.17 *Si X et Y sont des variables aléatoires sur Ω indépendantes, alors pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$*

Car $(X \in A, Y \in B) = \displaystyle\bigcup_{(x,y) \in A \times B} ((X = x) \cap (Y = y))$; les évènements $(X = x) \cap (Y = y))$ sont disjoints 2 à 2, donc $P(X \in A, Y \in B) = \displaystyle\sum_{(x,y) \in A \times B} P((X = x) \cap (Y = y))$
$= \displaystyle\sum_{(x,y) \in A \times B} P(X = x)P(Y = y) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} P(X = x)P(Y = y)$. Donc, par le corollaire du théorème de Fubini, $P(X \in A, Y \in B) = \displaystyle\sum_{x \in A} P(X = x) \sum_{y \in B} P(Y = y) = P(X \in A)P(Y \in B)$

16.3.5 Suites de variables aléatoires discrètes indépendantes

Définition 16.3.18 *Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires discrètes définies sur Ω. On dit que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes*
ssi $\forall x_1 \in X_1(\Omega), ..., \forall x_n \in X_n(\Omega)$, les évènements $(X_1 = x_1), ..., (X_n = x_n)$ sont indépendants
ssi $\forall x_1 \in X_1(\Omega), ..., \forall x_n \in X_n(\Omega)$, $P((X_1 = x_1) \cap ... \cap (X_n = x_n)) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$

Donc

Proposition 16.3.19 *Soit $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires discrètes définies sur Ω mutuellement indépendantes, alors*
pour tout $A_1 \subset X_1(\Omega), ..., A_n \subset X_n(\Omega)$, $P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k \in A_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in A_k)$

Par récurrence à partir de la propriété 16.3.17

Définition 16.3.20 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur Ω. On dira que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes si et seulement si, pour tout entier n, les n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes, ce qui est équivalent à dire que toute famille finie extraite de la suite est constituée de variables mutuellement indépendantes.*

Théorème 16.3.21 *Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires sur Ω mutuellement indépendantes, alors pour tout $m \in [\![1, n-1]\!]$ et pour toute fonction f et g, les variables aléatoires $f(X_1, ..., X_m)$ et $g(X_{m+1}, ..., X_n)$ sont indépendantes.*

Théorème admis.
Une idée de la démonstation dans le cas de 2 variables : X et Y deux variables indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
En effet, f définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et g définie sur $Y(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons $X' = f(X)$ et $Y' = g(Y)$. Soit $x' \in X'(\Omega) = f(X(\Omega))$ et $y' \in Y'(\Omega) = g(Y(\Omega))$.
$(X' = x') = \{\omega \in \Omega / f(X(\omega)) = x'\} = (X \in f^{-1}(\{x'\})$ et de même $(Y' = y') = (Y \in g^{-1}(\{y'\})$.
Alors $P((X' = x') \cap (Y' = y')) = P((X \in f^{-1}(\{x'\}) \cap (Y \in g^{-1}(\{y'\})$. L'indépendance de X et Y conduit alors à l'indépendance de X' et Y'.

Une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes permet de modéliser la répétition indépendante d'une même épreuve, par exemple un jeu infini de Pile ou Face est modélisé par une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, 1/2)$.
La question qui se pose alors : est-on certain qu'il existe toujours un espace probabilisé associé à cette suite infinie dénombrable d'expériences ? On en a construit un dans le cas du jeu de Pile ou Face. Mais dans d'autres situations ? La réponse est positive, en vertu du théorème suivant :

Théorème 16.3.22 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Notons $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ l'espace probabilisé associé à X_n et notons Ω l'ensemble des suites $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout n, $\omega_n \in \Omega_n$. Alors il existe une tribu $\mathcal{A}$ de Ω et une probabilité P sur Ω telle que*
$\forall n > 0, \forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n,\ P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} P_k(X_k = x_k)$

Ce théorème est admis (hors programme)
C'est ce théorème qui valide la démarche employée dans ce cours sur tout ce qui concerne les jeux infinis (lancers de dés etc)

16.4 Espérance, variance

16.4.1 Espérance d'une variable aléatoire

Vous avez vu en première année la définition de l'espérance d'une variable aléatoire finie. On va maintenant généraliser aux variables aléatoires discrètes

Définition 16.4.1 .

1. *Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs positives. L'espérance de X est la somme, finie ou $+\infty$ égale à $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$*
2. *Si X est à valeurs réelles, on dira que X est d'espérance finie si et seulement si la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.*
   Dans ce cas, sa somme est appelée espérance de la variable aléatoire réelle discrète X, notée $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.
3. *On dira que la variable aléatoire réelle discrète est centrée si et seulement si elle est d'espérance nulle.*

Remarque 16.4.2 *Si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ alors X est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_n x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.*

Remarque 16.4.3 *Une variable aléatoire discrète bornée est d'espérance finie*

car si M est un majorant de $|X|$ alors $\forall x \in X(\Omega)$, $|xP(X = x)| \leqslant MP(X = x)$ et on sait que la famille $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable de somme 1.

Exemple 16.4.4 *Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ où $\forall n \in \mathbb{N}$,*
$P(X = n) = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. Après avoir vérifié qu'il s'agit bien d'une variable aléatoire réelle discrète étudier son espérance.

Exemple 16.4.5 *Calculer l'espérance de la variable aléatoire X définie par la somme des faces lors du lancer de 3 dés.*

16.4.2 Propriétés de l'espérance

Proposition 16.4.6 ***Linéarité***
X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies.
Alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha X + \beta Y$ est d'espérance finie et $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$
Cas particulier : $\alpha X + \beta$ est d'espérance finie et $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$

En effet : Cas de la somme de deux variables aléatoires
• (1) Montrons que la famille $((x+y)P(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est sommable et calculons sa somme.
$|x + y|\, P(X = x, Y = y) \leqslant |x|\, P(X = x, Y = y) + |y|\, P(X = x, Y = y)$.
Or $\bigcup_{y \in Y(\Omega)} ((X = x) \cap (Y = y)) = (X = x)$. Donc $\sum_{y \in Y(\Omega)} |x|\, P(X = x, Y = y) = |x|\, P(X = x)$.
Pour finir, X étant d'espérance finie, la famille $(|x|\, P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

On fait de même pour $|y|\, P(X = x, Y = y)$,
on conclut donc que la famille $((x + y)P(X = x, Y = y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable.
De plus en reprenant maintenant le même raisonnement mais sans les valeurs absolues, on déduit que

$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} (x + y)P(X = x, Y = y) = E(X) + E(Y)$$

• (2) Maintenant qu'on sait que la famille $((x + y)P(X = x, Y = y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable, on va la sommer en choisissant une autre partition :
Notons $A_z = \{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)/x + y = z\}$. Ces ensembles $(A_z)_{z\in Z(\Omega)}$ forment un système complet d'évènements de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$
Notons $Z = X + Y$. $(Z = z) = \bigcup_{(x,y)\in A_z} ((X = x) \cap (Y = y))$ réunion disjointe, donc
$P(Z = z) = \sum_{(x,y)\in A_z} P((X = x) \cap (Y = y))$ et donc pour $z \in Z(\Omega)$,
$zP(Z = z) = \sum_{(x,y)\in A_z} (x + y)P((X = x) \cap (Y = y))$
Ainsi $E(X) + E(Y) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} (x + y)P(X = x, Y = y)$
$= \sum_{z\in\mathbb{Z}(\Omega)} \sum_{(x,y)\in A_z} (x + y)P((X = x) \cap (Y = y)) = \sum_{z\in\mathbb{Z}(\Omega)} zP(Z = z) = E(Z) = E(X + Y)$
• Pour ce qui concerne αX,
si α est nul alors la variable aléatoire réelle discrète est nulle, donc $E(\alpha X) = 0 = \alpha E(X)$.
Si $\alpha \neq 0$, $P(\alpha X = \alpha x) = P(X = x)$. X est d'espérance finie, donc la famille $(xP(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable et donc la famille $(\alpha xP(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable,
avec $\alpha xP(X = x)) = \alpha xP(\alpha X = \alpha x))$, donc αX est d'espérence finie et $E(\alpha X) = \alpha E(X)$.
• Cas particulier : il suffit de calculer $E(Y)$ dans le cas où Y est la variable aléatoire réelle discrète ne prenant que la valeur 1. Alors $P(Y = y) = 0$ si $y \neq 1$ et $P(Y = 1) = 1$, d'où $E(Y) = 1$.

Proposition 16.4.7 ***Positivité et croissance***
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies.
a. Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ alors $E(X) \geqslant 0$
b. $X \leqslant Y \Longrightarrow E(X) \leqslant E(Y)$

a. $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$ avec $x \geqslant 0$, donc $E(X) \geqslant 0$.
b. $X \leqslant Y \Longrightarrow Y - X \geqslant 0 \Longrightarrow E(Y - X) \geqslant 0 \Longrightarrow E(Y) - E(X) \geqslant 0$

Proposition 16.4.8 ***Comparaison***
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes .
Si $|X| \leqslant Y$ avec Y d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Car pour $x \in X(\Omega)$,
$|x|\, P(X = x) = |x| \sum_{y\in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)) \leqslant \sum_{y\in Y(\Omega)} yP((X = x) \cap (Y = y))$
Or la famille $((X = x)\cap(Y = y))_{x\in X(\Omega)}$ constitue une partition au plus dénombrable de $(Y = y)$.
Donc $\sum_{x\in X(\Omega)} |y|\, P((X = x) \cap (Y = y)) = |y|\, P(Y = y)$ et la famille $(|y|\, P(Y = y))_{y\in Y(\Omega)}$ est sommable car Y est d'espérance finie. Donc par le théorème de sommation par paquets, la famille $(|y|\, P((X = x) \cap (Y = y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est sommable et donc la famille

$(\sum_{y\in Y(\Omega)} |y|\, P((X=x)\cap(Y=y)))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, d'où la famille $(|x|\, P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, i.e ; X est d'espérance finie.

Théorème 16.4.9 ***Théorème de transfert***
Soit X une variable aléatoire réelle discrète et soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
Dans ce cas, $E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$

Démonstration non exigible.
La démonstration repose sur le même genre d'arguments que celle sur la linérité de l'espérance.

Proposition 16.4.10 ***Inégalité de Markov***
Soit X une variable aléatoire réelle discrète positive et d'espérance finie.
Alors $\forall t>0,\ P(X\geqslant t)\leqslant \frac{E(X)}{t}$

En effet : $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) \geqslant \sum_{x\in X(\Omega)\text{ et } x\geqslant t} xP(X=x)$
$E(X) \geqslant\ t \sum_{x\in X(\Omega)\text{ et } x\geqslant t} P(X=x) = tP(X\geqslant t)$

16.4.3 Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Théorème 16.4.11 ***Produit de 2 variables indépendantes***
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes et d'espérances finies.
Alors XY est d'espérance finie et $E(XY) = E(X)E(Y)$

En effet, notons $X(\Omega) = \{x_i/i\in I\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j/j\in J\}$ où I et J sont au plus dénombrables.
La variable aléatoire (X,Y) est discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Considérons $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=xy$.
XY est d'espérance finie si et seulement si la famille
$(x_iy_jP((X,Y)=(x_i,y_j))_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable .
Or $x_iy_jP((X,Y)=(x_i,y_j)) = x_iy_jP((X=x_i)\cap(Y=y_j)) = x_iy_jP(X=x_i)P(Y=y_j)$ car X et Y sont indépendantes.
X et Y sont d'espérances finies donc les familles $(x_iP(X=x_i))_{i\in I}$ et $(y_jP(Y=y_j))_{j\in J}$ sont sommables. Donc par le corollaire du théorème de Fubini, la famille $(x_iy_jP((X,Y)=(x_i,y_j))_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, i.e. XY est d'espérance finie.
De plus $E(XY) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_iy_jP((X,Y)=(x_i,y_j)) = \sum_{i\in I} x_iP(X=x_i)\times\sum_{j\in J} y_jP(Y=y_j) = E(X)E(Y)$

16.4.4 Espérance des variables aléatoires usuelles

Théorème 16.4.12 ***Lois finies***
a. Loi constante : $X=a$ alors $E(X)=a$
b. Loi uniforme : $X\sim U_n$ alors $E(X)=\frac{n+1}{2}$
c. Loi de bernoulli : $X\sim\mathcal{B}(1,p)$ alors $E(X)=p$
d. Loi binomiale : $X\sim\mathcal{B}(n,p)$ alors $E(X)=np$

Toutes ces lois sont finies, donc elles sont toutes d'espérance finie.
a. $E(X) = a.1 = a$
b. $E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$
c. $E(X) = 0(1-p) + 1p = p$
d. $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k.\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k$. Or pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $k.\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
Donc $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k.\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(1-p)^{n-k}p^k$
$= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}p^{k-1}$
$E(X) = np\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(1-p)^{(n-1)-j}p^j = np((1-p)+p)^{n-1} = np$

Théorème 16.4.13 ***Lois discrètes infinies***
a. Loi géométrique : $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $E(X) = \frac{1}{p}$
b. Loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$

a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $kP(X=k) = kpq^{k-1}$ avec $0 < q < 1$. Alors, D'Alembert montre que la série $\sum_k kP(X=k)$ converge (absolument), donc la variable X est d'espérance finie. Alors $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} pkq^{k-1}$. Or la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$ est la série dérivée de $\sum_{k\in\mathbb{N}} x^k$.
Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
D'où $E(X) = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$.
b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $kP(X=k) = k.e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$. Cette série est clairement convergente donc X est d'espérance finie et $E(X) = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

16.5 Variance, covariance, écart type

16.5.1 Moments

Définition 16.5.1 *Soit X une variable aléatoire réelle discrète et $m \in \mathbb{N}^*$. On dira que X admet un moment d'ordre m si et seulement si X^m est d'espérance finie, c'est à dire si la famille $(x^m P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.*

Remarque 16.5.2 *X a un moment d'ordre 1 signifie que X est d'espérance finie.*

Proposition 16.5.3 *Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2, alors X est d'espérance finie.*

En effet, $2|X| \leqslant X^2+1$. Or X^2 est d'espérance finie, donc X^2+1 aussi, et donc $|X|$ d'espérance finie. OK

Théorème 16.5.4 ***Inégalité de Cauchy-Schwarz***
X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2. Alors XY est d'espérance finie et $(E(XY))^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2)$

En effet, $|XY| \leqslant \dfrac{1}{2}(X^2+Y^2)$, donc XY est d'espérance finie.
Soit alors f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = E((tX+Y)^2)$. Cette fonction est définie car X^2, Y^2 et XY sont d'espérances finies.
$f(t) = t^2E(X^2) + 2tE(XY) + E(Y^2)$.
Si $E(X^2) = 0$ alors f est affine de signe constant, donc est constante, i.e. $E(XY) = 0$ donc l'inégalité est vraie.
Si $E(X^2) \neq 0$, alors la fonction f qui est polynomiale de degré 2 est de signe constant, donc son discriminant est négatif, ce qui conduit à l'inégalité souhaitée.

Conséquence 16.5.5 *l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2 est un sev de l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies.*

Clair car d'une part cet ensemble est inclus dans l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes d'espérances finies (voir propriété 16.5.3)
Par ailleurs, $(X+Y)^2 = X^2+Y^2+2XY$ et donc, $X+Y$ admet un moment d'ordre 2. Et il en est de même de λX.

16.5.2 Variance et écart type

Définition 16.5.6 *Soit X une variable aléatoire discrète ayant un moment d'ordre 2.
On définit la variance de X, notée $V(X)$ par : $V(X) = E((X-E(X))^2)$.
On appelle écart type de X le nombre souvent noté $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$*

Cette définition a bien un sens car d'une part, X ayant un moment d'ordre 2, alors $(X-E(X))^2 = X^2 - 2XE(X) + E(X)^2$ a un moment d'ordre 1, donc est d'espérance finie.
De plus, $(X-E(X))^2 \geqslant 0$ donc son espérance est positive, i.e. $V(X) \geqslant 0$, donc $\sigma(X)$ existe.

Remarque 16.5.7 *X a un moment d'ordre 2 $\Longrightarrow V(X) \geqslant 0$*

Théorème 16.5.8 *Soit X variable aléatoire réelle discrète ayant un moment d'ordre 2. Alors
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ V(\alpha X+\beta) = \alpha^2 V(X)$*

Car ...

Remarque 16.5.9 *Si X est une variable aléatoire réelle discrète ayant un moment d'ordre 2, alors $E(X^2) \geqslant (E(X))^2$.*

Définition-propriété 16.5.10 .
Soit X variable aléatoire réelle discrète ayant un moment d'ordre 2.
- *Si $\sigma(X) > 0$ alors la variable aléatoire réelle discrète $\dfrac{X}{\sigma(X)}$ a un écart type égal à 1. on dit alors qu'elle est réduite
et la variable aléatoire réelle discrète $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est d'espérance nulle et d'écart type égal à 1. On dit qu'elle est centrée réduite.*
- *Si $\sigma(X) = 0$ alors X est presque surement égale à $E(X)$, i.e. $P(X = E(X)) = 1$.*

Car ...

Théorème 16.5.11 *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*
Soit X variable aléatoire réelle discrète ayant un moment d'ordre 2.
Alors, $\forall \varepsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$

Car on applique l'inégalité de Markov (16.4.10) à la variable aléatoire réelle discrète $Z = X - E(X)$:
$P(|Z| \geqslant \varepsilon) = P(Z^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \dfrac{E(Z^2)}{\varepsilon^2} = \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$

16.5.3 Variance des lois usuelles

Théorème 16.5.12 .
a. Loi constante : $X = a$ *alors* $V(X) = 0$
b. Loi uniforme : $X \sim U_n$ *alors* $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$
c. Loi de bernoulli : $X \sim \mathcal{B}(1,p)$ *alors* $V(X) = pq$
d. Loi binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ *alors* $V(X) = npq$
e. Loi géométrique : $X \sim \mathcal{G}(p)$ *alors* $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$
f. Loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ *alors* $V(X) = \lambda$

Les 4 premières lois sont finies et ont été étudiées en 1ère année. Refaire la démonstration.
e. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Notons $u_n = n^2 P(X = n) = n^2 q^{n-1} p \neq 0$. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 q$ a pour limite $q < 1$. On en déduit que la série $\sum n^2 P(X = n)$ converge, c'est à dire que X a un moment d'ordre 2 donc une variance.
Vérifier qu'alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ vaut q/p^2 (exercice sur les sommes de séries)
f. Justifier que X a un moment d'ordre 2 et montrer que $V(X) = \lambda$.

16.5.4 Covariance

Définition 16.5.13 *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes ayant un moment d'ordre 2.*
On appelle covariance de X et Y le réel noté $Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

Cette définition a bien un sens car $(X-E(X))(Y-E(Y)) = XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)$. Or XY est d'espérance finie (CS 16.5.4), X d'espérance finie donc $XE(Y)$ aussi de même que $YE(X)$ ainsi que la variable aléatoire réelle discrète constante $E(X)E(Y)$. Donc $Cov(X,Y)$ existe.

Proposition 16.5.14 *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes ayant un moment d'ordre 2.*
Alors $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Car ...

Conséquence 16.5.15 *Si X et Y sont indépendantes et ont un moment d'ordre 2,*
alors $Cov(X,Y) = 0$
Attention, la réciproque est fausse.

clair pour le sens direct : c'est le théorème 16.4.11

Exemple 16.5.16 *Soit X et Y dont la loi du couple est définie par le tableau suivant :*

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	0	1/2	0
0	1/4	0	1/4

(X,Y) est clairement une variable aléatoire réelle discrète (dire pourquoi). On en déduit immédiatement la loi de X et celle de Y (lois marginales)

X	-1	0	1
	1/4	1/2	1/4

et

Y	-1	0
	1/2	1/2

. Alors $E(X) = 0$ et $E(Y) = -1/2$. De plus, la lecture du tableau montre que $P(XY = 0) = 1$ et donc $E(XY) = 0$.
Ainsi $E(XY) = E(X)E(Y)$, donc $Cov(X,Y) = 0$.
Mais X et Y ne sont pas indépendantes car $P(X = -1, Y = -1) = 0 \neq P(X = -1)P(Y = -1)$.
La réciproque de la proposition est donc fausse.

Proposition 16.5.17 ***Propriétés de la covariance***
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes ayant un moment d'ordre 2.

1. $Cov(X,X) = V(X)$
2. $Cov(Y,X) = Cov(X,Y)$
3. $Cov(aX, bY) = abCov(X,Y)$ *pour a et b réels*
4. $Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$
5. $Cov(X, 1) = 0$

À faire.

Théorème 16.5.18 ***Variance d'une somme***
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes ayant un moment d'ordre 2.
Alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$

À faire

Théorème 16.5.19 ***Variance d'une somme de variables indépendantes***
$X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes.
Alors $V(X_1 + ... + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$

Se démontre par récurrence. Tout repose sur le fait que si $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, alors $X_1 + ... + X_{n-1}$ et X_n sont indépendantes (voir théorème 16.3.21)

16.5.5 Loi faible des grands nombres

Théorème 16.5.20 ***Loi faible des grands nombres***
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes indépendantes admettant un moment d'ordre 2, de mêmes lois. Notons alors $m = E(X_1)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
Alors $\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$

En effet, par linéarité, $E(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n} E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = m$ et en notant $\sigma = \sigma(X_1)$,
$V(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$ car les variables aléatoires son indépendantes.
Alors le théorème de Bienaymé-Tchebychev (Théorème 16.5.11) donne
$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$

Interprétation : On renouvelle de manière indépendante une même expérience pour laquelle on s'intéresse à une mesure donnée. La loi permet de justifier que fréquemment, une valeur de l'espérance de cette mesure est approximée par la moyenne arithmétique des résultats de cette expérience.

16.6 Fonctions génératrices

16.6.1 Définition

Définition 16.6.1 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.*
La fonctions génératrice de X, notée G_X est définie par

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n$$

• G_X est donc une série entière
• Pour t réel fixé, t^X est une variable aléatoire dont l'espérance éventuelle est obtenue par le théorème de transfert.

16.6.2 Convergence et propriétés

Théorème 16.6.2 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors*
— *Le rayon R de convergence de la série entière G_X vérifie $R \geqslant 1$*

— *La série entière G_X converge normalement sur* $[-1, 1]$
— *La fonction G_X est continue sur* $[-1, 1]$
— *La fonction G_X est convexe sur* $[0, 1]$

En effet : $\forall t \in [-1, 1],\ 0 \leqslant |P(X = n)t^n| \leqslant P(X = n)$. Or les évènements $(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ forment un système complet d'évènements, $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(X = n) = 1$, donc la série G_X converge normalement sur $[-1, 1]$, et donc, $R \geqslant 1$, G_X est continue sur $[-1, 1]$, et G_X est infiniment dérivable sur $]-1, 1[$, donc en particulier sur $[0, 1[$ et
$\forall t \in [0, 1[,\ G''_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X = n)t^{n-2} \geqslant 0$, donc G_X est convexe sur $[0, 1[$, et étant continue en 1, elle est convexe sur $[0, 1]$

Conséquence 16.6.3 *sous ces mêmes hypothèses,* $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$

Car ...

Conséquence 16.6.4 *Donc la connaissance de G_X suffit pour connaître la loi de X.*

Conséquence 16.6.5 $G_X(1) = 1$ *et* $\forall t \in [-1, 1],\ |G_X(t)| \leqslant 1$

16.6.3 Cas des lois usuelles

Théorème 16.6.6 *. a. Loi de bernoulli :* $X \sim \mathcal{B}(1, p) \iff G_X : t \to (1 - p) + pt$ *sur* $\mathbb{R}$
b. Loi binomiale : $X \sim \mathcal{B}(n, p) \iff G_X : t \to (q + pt)^n$ *sur* $\mathbb{R}$
c. Loi géométrique : $X \sim \mathcal{G}(p) \iff G_X : t \to \dfrac{pt}{1 - qt}$ *de rayon de convergence* $R = \dfrac{1}{q}$ *(avec* $q = 1 - p$*)*
f. Loi de Poisson : $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \iff G_X : t \to e^{(t-1)\lambda}$ *de rayon* $R = +\infty$

Calculs à savoir faire.

16.6.4 Fonctions génératrices et moments

Théorème 16.6.7 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.*
— *X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1, et dans ce cas,*

$$E(X) = G'_X(1)$$

.
— *X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 et alors*

$$G''_X(1) = E(X(X - 1)) \text{ et } V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

car ...

16.6.5 Fonction génératrice et somme

Théorème 16.6.8 — *Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et* ***indépendantes****.*
Alors $\forall t \in]-1, 1[,\ G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$

— *Généralisation : $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et* ***mutuellement indépendantes****.*
Alors $G_{X_1+...+X_n} = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}$ *sur* $]-1, 1[$.

Car pour $t \in]-1, 1[$, $G_{X+Y}(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y)$. Or X et Y sont indépendantes, donc par le théorème 16.3.21, t^X et t^Y sont indépendantes, donc $E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y) = G_X(t)G_Y(t)$ (théorème 16.4.11), cqfd dans le cas de 2 variables. Dans le cas de n variables, récurrence sur n.

Chapitre 17

Equations différentielles linéaires

Contents

17.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Dans toute la suite, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

17.1.1 Étude générale

Définition 17.1.1 *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type :*

$$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \qquad (\mathcal{E})$$

où $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$, $b \in \mathcal{C}(I, E)$ et la fonction $x : I \to E$ est la fonction inconnue, dérivable sur I et

Cette équation se note aussi $x' = a(x) + b$ ou $x' = a.x + b$.
Insistons sur le fait que $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $\forall t \in I,\ a(t)$ est un endomorphisme de E.

Si E est muni de la base $(e_1, ..., e_n) = \mathcal{B}$, notons $X(t)$ la matrice colonne des coordonnées de $x(t)$ dans $\mathcal{B}$, $B(t)$ la matrice colonne des coordonnées de $b(t)$ dans $\mathcal{B}$ et $A(t)$ la matrice de l'endomorphisme $a(t)$ dans $\mathcal{B}$.

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ i.e. } x(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) e_k, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \text{ i.e. } b(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k(t) e_k$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

L'équation s'écrit alors dans la base $\mathcal{B}$: $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ c'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_1'(t) = & a_{1,1}(t)x_1(t) + & \dots & + a_{1,n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = & a_{2,1}(t)x_1(t) + & \dots & + a_{2,n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \quad\vdots & & & \\ x_n'(t) = & a_{n,1}(t)x_1(t) + & \dots & + a_{n,n}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{array} \right.$$

Remarque 17.1.2 *Pour $n = 1$ on retrouve les équations vues en MPSI.*

Exemple 17.1.3 *Pour $n = 2$, l'équation* $\begin{cases} x'(t) = & 2tx(t) - y(t) + t\cos(t) \\ y'(t) = & x(t) + 2ty(t) + t\sin(t) \end{cases}$ *s'écrit matriciellement :*

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}$$

Exemple 17.1.4 *Ici encore $n = 2$. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, la base canonique étant orthonormée directe, notons $r(t)$ la rotation plane d'angle t.*

$$r : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \text{ et } b : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R}^2 \\ t \to & \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Considérons l'équation différentielle : $u'(t) = r(t)(u(t)) + b(t)$ où on pose $u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Cette équation s'écrit donc dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \begin{cases} x'(t) = & \cos(t)x(t) - \sin(t)y(t) + t \\ y'(t) = & \sin(t)x(t) + \cos(t)y(t) + 1 \end{cases} \qquad (\mathcal{E})$$

Proposition 17.1.5 *x solution de $(\mathcal{E})$ sur $I \Longrightarrow x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I*

Car x est continue sur I, a est continue sur I donc $t \to a(t)(x(t))$ est continue sur I. De plus b continue sur I donc x' est continue sur I, et donc x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Plus généralement,

Proposition 17.1.6 *lorsque a et b sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur I, toute solution x de $(\mathcal{E})$ est alors de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I*

Par récurrence sur p.

17.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

Définition 17.1.7 *On appelle équation homogène associée à $\mathcal{E}$ l'équation $x'(t) = a(t)(x(t))$* $\qquad (\mathcal{H})$

ce qui revient à remplacer le vecteur $b(t)$ par le vecteur nul.

Notons $\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^1(I,E) & \to \mathcal{C}^0(I,E) \\ x & \to x' - a(x) \end{cases}$ où pour $t \in I$, $(x' - a(x))(t) = x'(t) - a(t)(x(t))$.

φ est linéaire
car ....

Ansi on peut en conclure

Proposition 17.1.8 *L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel.*

Car l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$ est le noyau de φ.

Proposition 17.1.9 *Si $(\mathcal{E})$ a au moins 1 solution, notée x_1.*
x est solution de $(\mathcal{E}) \iff x - x_1$ est solution de $(\mathcal{H})$.

car ...

Proposition 17.1.10 *Principe de substitution*

$$\begin{aligned} & x_1 \text{ solution de } x' = a.x + b_1 \\ & \qquad \Longrightarrow x_1 + x_2 \text{ solution de } x' = a.x + (b_1 + b_2) \\ & x_2 \text{ solution de } x' = a.x + b_2 \end{aligned}$$

car ...

17.1.3 Problème de Cauchy

Définition 17.1.11 *Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$.*
On appelle problème de Cauchy relatif à l'équation différentielle $x' = a.x + b$ sur I, la recherche de fonctions x solutions de $x' = a.x + b$ et vérifiant $x(t_0) = x_0$.

Théorème 17.1.12 *Soit $x \in \mathcal{C}(I, E)$ et $(t_0, x_0) \in I \times E$.*

x est solution du problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} x' = a.x + b \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$ *si et seulement si*

$\forall t \in I,\ x(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} ((a(u)(x(u)) + b(u))\, du$

car ...

Théorème 17.1.13 ***Théorème de Cauchy***
E espace vectoriel de dimension finie, $a \in \mathcal{C}(I, L(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$.

$\forall t_0 \in I,\ \forall x_0 \in E$ le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & a.x + b \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$ *a une et une seule solution sur I.*

Admis.

17.1.4 Dimension de l'espace des solutions

Théorème 17.1.14 *L'ensemble S_H des solutions de l'équation homogène (H) : $x' = a.x$ est un sev de $\mathcal{C}^1(I, E)$ isomorphe à E, de plus, $\forall t_0 \in I$, l'application φ_{t_0} :* $\left\{ \begin{array}{ccc} S_H & \to & E \\ x & \to & x(t_0) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

car $\forall t_0 \in I$,
φ_{t_0} est linéaire ...
φ_{t_0} est bijective ...

Conséquence 17.1.15 *dim*(S_H) =*dim*(E)

Attention : Ce théorème n'est vrai que dans le cas d'une résolution sur un intervalle I, mais ne s'applique pas dans le cas de la résolution sur une réunion d'intervalles, par exemple dans le cas d'une résolution sur $\mathbb{R}^*$.

Corollaire 17.1.16 *$x_1, ..., x_n$ solutions de (H).*

$$\begin{aligned}(x_1, ..., x_n) \textit{ est libre dans } S_H &\iff \exists t_0 \in I,\ (x_1(t_0), ..., x_n(t_0)) \textit{ est libre dans } E \\ &\iff \forall t \in I,\ (x_1(t), ..., x_n(t)) \textit{ est libre dans } E\end{aligned}$$

En effet ...

Exemple 17.1.17 $x_1 : t \rightarrow \begin{pmatrix} t+1 \\ \\ t^2 \end{pmatrix}$ *et* $x_2 : t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \\ t \end{pmatrix}$. *On montre facilement que (x_1, x_2) est une famille libre de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Mais la famille $(x_1(0), x_2(0))$ est liée dans $\mathbb{R}^2$, il n'existe donc pas d'équation différentielle linéaire homogène définie sur $\mathbb{R}$ dont x_1 et x_2 seraient simultanément des solutions.*

17.1.5 Système fondamental de solutions, Wronskien

Définition 17.1.18 *Une base de S_H, où S_H est l'ensemble des solutions de l'équation (H) : $x' = a.x$, est appelée* ***système fondamental (ou complet) de solutions de*** *(H).*

Posons n =dim(E). Soit $(x_1, ..., x_n)$ une base de S_H. On vient de voir que $\forall t \in I,\ (x_1(t), ..., x_n(t))$ est libre dans E, c'est donc une base de E.
Soit $x \in S_H$. Pour $t \in I,\ x(t) \in E$. Notons $\mathcal{B}_t$ la base de E dépendant de t : $(x_1(t), ..., x_n(t))$. Les coefficients de $x(t)$ dans $\mathcal{B}_t$ ne dépendent pas de t, car ce sont les coefficients de x dans la base $(x_1, ..., x_n)$ de S_H.

Définition 17.1.19 *Soit $\mathcal{B}$ une base de E avec dim$(E) = n$, et soit $x_1, ..., x_n$ n solutions de (H).*
On appelle ***Wronskien*** *de ces solutions dans la base $\mathcal{B}$ l'application*

$$W : \begin{cases} I & \rightarrow & K \\ \\ t & \rightarrow & det_{\mathcal{B}}(x_1(t), ..., x_n(t)) \end{cases}$$

Proposition 17.1.20 *dim$(E) = n$ et $\mathcal{B}$ une base de E.*
$x_1, ..., x_n$ des solutions de (H) dans I.
S'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) = 0$ alors $\forall t \in I,\ W(t) = 0$
et donc s'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$ alors $\forall t \in I,\ W(t) \neq 0$

car ...

17.1.6 Représentation d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

Définition 17.1.21 *Une **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** n est une équation du type :*

$$x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} .... + a_1 x' + a_0 x + b \qquad (\mathcal{E})$$

où $\forall i \in [[1, n]],\ a_i \in \mathcal{C}(I, K)$ *et où la fonction* $x \in \mathcal{C}^n(I, K)$ *est la fonction à déterminer.*

Exemple 17.1.22 $x''(t) + 2tx'(t) - 3x(t) = 7e^t$ *pour* $t \in \mathbb{R}$ *i.e.* $I = \mathbb{R}$

Cette équation se note de manière simplifiée : $x'' + 2tx' - 3x = 7e^t$.

Exemple 17.1.23 $tx'' - t^2x' + (t+1)x = 0$ *qui se ramène à* $x'' = tx' - \dfrac{t+1}{t}x$, *et donc ici* $I =]0, +\infty[$ *ou* $I =]-\infty, 0[$.

Reprenons l'équation $(\mathcal{E})$ du dessus.

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathcal{C}^n(I, K)$. Alors $X \in \mathcal{C}^1(I, K^n)$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix}$

Alors $X' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$,

Théorème 17.1.24 *L'équation* $x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} .... + a_1x' + a_0x + b \qquad (\mathcal{E})$ *est équivalente à l'équation* $X' = A.X + B$ *où*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(K)),$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{C}(I, K^n).$$

Exemple 17.1.25 *Représenter les équations des exemples 17.1.22 et 17.1.23*

Définition 17.1.26 *Soit $t_0 \in I$ et $(x_0, ..., x_{n-1}) \in K^n$.*
On appelle ***problème de Cauchy relatif à l'équation différentielle scalaire*** *$x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} .... + a_1x' + a_0x + b$ $(\mathcal{E})$ sur I la recherche de fonctions x solutions de $\mathcal{E}$ et vérifiant $x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, ..., x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$.*

La représentation des équations différentielles scalaires et le théoème de Cauchy pour les équations différentielle linéaires vu au dessus conduit au théorème :

Théorème 17.1.27 *Soit $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathcal{C}(I, K)$, $b \in \mathcal{C}(I, K)$, $t_0 \in I$ et $(x_0, ..., x_{n-1}) \in K^n$. alors le problème de Cauchy relatif à l'équation différentielle scalaire $x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} .... + a_1x' + a_0x + b$ $(\mathcal{E})$ et à t_0 et $(x_0, ..., x_{n-1})$ admet 1 et 1 seule solution x.*
C'est à dire : $\exists! x \in \mathcal{C}^n(I, K)$ tq $x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} .... + a_1x' + a_0x + b$ avec

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

Proposition 17.1.28 *L'ensemble S_H des solutions de l'équation*
(H) *:* $x^{(n)} = a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} .... + a_1x' + a_0x$
est un espace vectoriel de dimension n *; et*

$$\forall t_0 \in I,\ \varphi_{t_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} S_H & \to & \mathbb{K}^n \\ & & \\ x & \to & (x(t_0), x'(t_0), ..., x^{(n-1)}(t_0)) \end{array} \right.$$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

car ...

17.2 Résolution des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants.

17.2.1 Cas où $E = K$: rappels de première année

17.2.1.1 Equations du premier ordre

$(\mathcal{E})$ s'écrit $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ avec $a, b \in \mathcal{C}(I, K)$.
Résolution de l'équation homogène
$(\mathcal{H})$ est alors $x'(t) = a(t)x(t)$.
a est continue sur I, admet donc une primitive A sur I.

Théorème 17.2.1 *x est solution de* $x'(t) = a(t)x(t) \iff \exists\lambda \in K,\ \forall t \in I,\ x(t) = \lambda e^{A(t)}$ *où A primitive de a sur I*

car ...

Résolution de l'équation $(\mathcal{E})$. Il suffit de trouver une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
- Y a-t-il une solution évidente ? par exemple une fonction constante ?
- Y a-t-il une solution déjà rencontrée dans les questions précédentes du problème ?
- Y a-t-il une indication dans l'énoncé permettant de trouver une solution particulière ? par exemple "l'équation admet-elle une solution polynomiale ?
- Sinon : méthode de la "variation de la constante"
  On cherche la solution y sous la forme $y = ue^A$ ce qui revient à remplacer la constante λ par une fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
  Alors $y' = u'e^A + u.a.e^A$. y solution de $(\mathcal{E}) \iff u'e^A + uae^A = aue^A + b$ i.e. $u'e^A = b$.

Donc on recherche une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme $y = ue^A$ avec $u'e^A = b$

On peut ainsi exprimer la solution du problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} x' = ax + b \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right.$

Il s'agit de la fonction $x : t \to \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \left(b(z) e^{-\int_{t_0}^{z} a(v)dv} \right) dz \right) e^{\int_{t_0}^{t} a(v)dv}$

Exemple 17.2.2 $x' = \frac{1}{t}x + \frac{1}{t} \qquad (\mathcal{E})$.
Résolution sur $I =$
Solutions de l'équation homogène : ce sont les fonctions $x : t \to$
Solution particulière ?

Y a-t-il des solutions de $tx' = x + 1$ *sur* $[0, +\infty[$ *? i.e. parmi les solutions trouvées, y en at-il qui sont prolongeables par continuité en 0, et de classe* $\mathcal{C}^1$ *en 0 ?*

Que penser alors du problème de Cauchy : $tx' = x + 1$ *avec* $x(0) = 2$ *? Expliquer ..*

Exemple 17.2.3 $x' = tx + 1 - t^2$

17.2.1.2 Cas des équations scalaires du second ordre à coefficients constants

Ce sont les équations du type $x'' + ax' + bx = f \qquad (\mathcal{E})$ où a et b sont des scalaires et $f \in \mathcal{C}(I, K)$.
Pour reprendre les écritures utilisées dans ce chapitre, ces équations s'écrivent $x'' = -ax' - bx + f$ avec a et b réels.

- **Résolution de l'équation homogène** : rappels
  On appelle polynôme caractéristique lié à $(\mathcal{E})$ le polynôme $P = X^2 + aX + b$.
  - 1er cas : $\Delta = a^2 - 4b > 0$. Alors P a deux racines réelles r_1 et r_2.
    x est solution de $(\mathcal{H}) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$
  - 2nd cas : $\Delta = 0$. Alors P a 1 racine double r.
    x est solution de $(\mathcal{H}) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = (\alpha t + \beta) e^{rt}$
  - 3ème cas $\Delta < 0$. Alors P a deux racines complexes non réelles conjuguées r et $\overline{r}$.
    x est solution de $(\mathcal{H}) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = (\alpha \cos(Im(r)t) + \beta \sin(Im(r)t)) e^{Re(r)t}$

  Cas particuliers à connaître (physique) :
  - $x'' = \omega^2 x \quad (\mathcal{H})$ avec $\omega \in \mathbb{R}$
    x est solution de $(\mathcal{H}) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t}$
  - $x'' + \omega^2 x = 0 \quad (\mathcal{H}) \quad$ avec $\omega \in \mathbb{R}$
    x est solution de $(\mathcal{H}) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$.
    Pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ i.e. x n'est pas la fonction nulle,
    alors $x(t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos \omega t + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin \omega t \right)$

    Soit ϕ tel que $\begin{cases} \cos(\phi) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \\ \sin(\phi) = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{cases}$.

Alors $x(t) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(\omega t - \phi) = \lambda\cos(\omega t - \phi)$

Remarque 17.2.4 $(\mathcal{E}) \iff \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$ *Notons alors* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, *alors* $\chi_A = det(XI - A) = ... = X^2 + aX + b$ *qui est justement l'équation caractéristique de l'équa diff.*

- **Solution particulière de** $(\mathcal{E})$.
  - Soit il y a une solution particulière "évidente" ou rencontrée précédemment dans l'énoncé.
  - Si f est une exponentielle polynôme : i.e. $\forall t,\ f(t) = P(t)e^{mt}$ avec P polynôme et $m \in \mathbb{C}$.
    Par exemple
    - $f : t \to P(t)$ (ici $m = 0$)
    - $f : t \to \lambda e^{mt}$ ici P est le polynôme constant égal à λ
    - $f : t \to P(t)\cos(at)e^{bt}$ avec a et b réel. Alors $f(t) = Re\left(P(t)e^{(b+ia)t}\right)$
    - ...

    alors
    1. Si m n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $t \to Q(t)e^{mt}$ où Q est un polynôme tel que deg(Q) =deg(P)
    2. Si m est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $t \to Q(t)e^{mt}$ où Q est un polynôme tel que deg(Q) = 1+deg(P)
    3. Si m est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $t \to Q(t)e^{mt}$ où Q est un polynôme tel que deg(Q) = 2+deg(P)
  - On verra par la suite comment rechercher une solution particulière quand on n'est pas dans ces situations

Exemple 17.2.5 $x'' + 4x' + 4x = (t+3)e^{-2t}$
à faire.
On trouvera comme solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ *:*
$x : t \to \left(\frac{t^3}{6} + 3\frac{t^2}{2} + \beta t + \alpha\right)e^{-2t}$

Remarque 17.2.6 *Dans le cas d'une équation différentielle du 1er ordre à coefficients constants et à second membre exponentielle polynôme,* $x' + ax = P(t)e^{mt}$
Le polynôme caractéristique est $X + a$
Une base de (S_H) *est* $t \to e^{-at}$
Solution particulière :
— *si* $m \neq -a$ *on cherche une solution particulière sous la forme* $t \to Q(t)e^{mt}$ *avec*

$deg(Q)$ =$deg(P)$

— *si $m = -a$ on cherche une solution particulière sous la forme $t \to Q(t)e^{mt}$ avec $deg(Q) = 1+deg(P)$*

Exemple 17.2.7 *Recherche des primitives sur $\mathbb{R}$ de $t \to (t^3+t^2+1)e^{2t}$*

...

on trouve les fonctions $t \to \left(\frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} + \frac{3}{8}\right)e^{2t} + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

17.2.2 Résolution des systèmes linéaires homogènes à coefficients constants.

Il s'agit des équations du type $(\mathcal{H}) : x'(t) = a(x(t))$ où $a \in L(E)$ (a ne dépend pas de t). Matriciellement l'équation s'écrit : $X'(t) = A.X(t)$ où $A \in \mathcal{M}_n(K)$ (A ne dépend pas de t).

Théorème 17.2.8 *. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in E$. Le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = a(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ avec $a \in L(E)$ admet pour unique solution la fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \to E \\ t \to exp((t-t_0)a)(x_0) \end{cases}$*

En effet ...

Remarque 17.2.9 *Les solutions de l'équation $x' = Ax$ sont donc les fonctions $x : t \to exp(tA).u$ où u est un vecteur constant de $\mathbb{K}^n$*

17.2.3 Rappels sur les exponentielles de matrices

$A \in \mathcal{M}_n(K)$ alors $exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

17.2.3.1 Si A est diagonalisable

$\exists D \in \mathcal{M}_n(K),\ \exists P \in GL_n(K)$ tq $D = P^{-1}AP$ i.e. $A = PDP^{-1}$

alors $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}$, et donc $\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{D^k}{k!}\right)P^{-1}$.

Or l'application $\begin{cases} \mathcal{M}_n(K) & \to \mathcal{M}_n(K) \\ M & \to PMP^{-1} \end{cases}$ est continue (car linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension finie). Donc, par passage à la limite $exp(A) = Pexp(D)P^{-1}$

Or $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ et $D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$ d'où $exp(D) = \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{d_n} \end{pmatrix}$,
ce qui permet de trouver $exp(A) = P.exp(D).P^{-1}$

17.2.3.2 Si on connaît un polynôme annulateur de A

Notons le P_A (par exemple le polynôme caractéristique). $\deg(P_A) \leqslant n$.
Pour $k \in \mathbb{N}$ on divise X^k par P_A : $X^k = QP_A + R_k$ avec $\deg(R_k) < \deg(P_A)$.
Ainsi $A^k = R_k(A)$. On parvient alors à exprimer $exp(A)$

Exemple 17.2.10 $A = \begin{pmatrix} -6 & 49 & -56 \\ -8 & 57 & -64 \\ -6 & 42 & -47 \end{pmatrix}$. *Un calcul rapide donne* $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-2)$
Montrer que $A^k = (2^k - k - 1)A^2 + (-2.2^k + 3k + 2)A + (2^k - 2k)I$
En déduire $exp(A)$

17.2.4 Autres méthodes de résolution

17.2.4.1 Cas où A est diagonalisable et ne dépend pas de t

On diagonalise A : $A = PDP^{-1}$.
Posons alors $X' = AX \Longrightarrow P^{-1}X' = DP^{-1}X$
Or A ne dépend pas de t, donc P et D ne dépendent pas de t. D'où $P^{-1}X' = (P^{-1}X)'$
alors, en posant $Y = P^{-1}X$, Y est solution de l'équation différentielle $Y' = DY$, c'est à dire, avec les notations naturelles,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} y_1' & = d_1 y_1 \\ \vdots & \\ y_n' & = d_n y_n \end{cases}$$

On en conclut $Y' = DY \iff \exists \lambda_1, ..., \exists \lambda_n,\ \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{d_1 t} \\ \lambda_2 e^{d_2 t} \\ \vdots \\ \lambda_n e^{d_n t} \end{pmatrix}$

Or $Y = P^{-1}X$ donc $X = PY$ et donc X est ainsi connue

Exemple 17.2.11 *Résoudre* $\begin{cases} x' & = x - z \\ y' & = y + z \\ z' & = -x + y - z \end{cases}$

Théorème 17.2.12 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalisable.*
Notons $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A, et $(V_1, ..., V_n)$ une base de vecteurs propres de $\mathbb{K}^n$ associée aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$

$X' = AX \iff \exists C_1, ..., C_n$ *constantes telles que* $\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t} V_k$

Remarque préliminaire : Si λ_1 est une valeur propre de multiplicité m_1, A étant diagonalisable, $dim(Ker(\lambda_1 I - A)) = m_1$, les vecteurs $(V_1, ..., V_{m_1})$ forment une base de $Ker(\lambda_1 I - A)$.

...

Exemple 17.2.13 *Résoudre :* $\begin{cases} x' &= -2x + z \\ y' &= x - y - z \\ z' &= x - 2z \end{cases}$

17.2.4.2 Cas où A n'est pas diagonalisable

Alors A est trigonalisable sur $\mathbb{C}$: $\exists T$ triangulaire supérieure, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $T = P^{-1}AP$ i.e. $A = PTP^{-1}$.
$X' = AX \iff P^{-1}X' = T(P^{-1}X)$ avec P à coefficients constants.
On pose alors $Y = P^{-1}X$, et donc Y est solution de $Y' = TY$ système qui s'écrira :

$$\begin{cases}
y_1' = t_{1,1}y_1 + t_{1,2}y_2 + t_{1,3}y_3 + \dots + t_{1,n-1}y_{n-1} + t_{1,n}y_n \\
y_2' = t_{2,2}y_2 + t_{2,3}y_3 + \dots + t_{2,n-1}y_{n-1} + t_{2,n}y_n \\
y_3' = t_{3,3}y_3 + \dots + t_{3,n-1}y_{n-1} + t_{3,n}y_n \\
\vdots \\
y_{n-1}' = t_{n-1,n-1}y_{n-1} + t_{n-1,n}y_n \\
y_n' = t_{n,n}y_n
\end{cases}$$

Ce système se résout en commençant "par le bas"

Exemple 17.2.14 *Résoudre* $\begin{cases} x' &= 2x + y - z \\ y' &= 2y - z \\ z' &= 2z \end{cases}$

$$\ldots \text{ On trouve } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{2t} \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2} - t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 17.2.15 *Résoudre* $\begin{cases} x' &= 5x - 3y \\ y' &= 3x - y \end{cases}$.

1. *1ere méthode : résoudre ce système en passant par les exponentielles de matrices*

$$\ldots \text{ On trouve } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 3t+1 & -3t \\ 3t & 1-3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

2. *2nde méthode : résoudre ce système en triangularisant sa matrice*

17.3 Résolution générale des systèmes différentiels

Si $\dim(E) = n > 1$ et a dépend de t, on ne connaît pas de méthode générale permettant de résoudre l'équation $(H)\ :\ x'(t) = a(t)(x(t))$.
Le théorème de Cauchy dit que l'ensemble des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension n, mais il ne dit pas comment trouver ces solutions.
Dans ce paragraphe on suppose qu'on connaît un système fondamental $(x_1, ..., x_n)$ de solutions de (H), donc qu'on connaît toutes les solutions de (H). On s'intéresse alors à la résolution de $(\mathcal{E})\ :\ x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$.

Théorème 17.3.1 .
Soit $a \in \mathcal{C}(I, L(E))$, $b \in \mathcal{C}(I, E)$ *et* $(x_1, ..., x_n)$ *un système fondamental de solutions de* $(H)\ :$ $x'(t) = a(t)(x(t))$ *sur* I.
Alors les solutions de $(\mathcal{E})\ :\ x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$ *sont les fonctions*
$x : t \to C_1(t)x_1(t) + ... + C_n(t)x_n(t)$ *où* $\forall k,\ C_k : I \to \mathbb{K}$ *est de classe* C^1, *avec* $C_1'(t)x_1(t) + ... + C_n'(t)x_n(t) = b(t)$

En effet ...

Exemple 17.3.2 *On considère le système* $\begin{cases} x' &= \dfrac{t}{t-1}x - \dfrac{1}{t-1}y - t \\ y' &= x - t \end{cases}$ $\quad (\mathcal{E})$ *qui s'écrit*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{t-1} & -\dfrac{1}{t-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix}$$

Vérifier que $X_1 : t \to \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ *et* $X_2 : t \to \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ *sont tq* (X_1, X_2) *forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée sur* $]1, +\infty[$.
Résoudre alors l'équation $(\mathcal{E})$.

...

Exemple 17.3.3 *On considère le système* $\begin{cases} x' &= \dfrac{2t^2}{1+t^3}x - \dfrac{2t}{1+t^3}y + 2t^2 \\ y' &= \dfrac{1}{1+t^3}x + \dfrac{t^2}{1+t^3}y + t^3 - 1 \end{cases} \quad (\mathcal{E})$

Vérifier que $X_1 : t \to \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ *et* $X_2 : t \to \begin{pmatrix} t^2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *forme un système fondamental de l'équation homogène associée.*
Résoudre alors l'équation $(\mathcal{E})$.

Exemple 17.3.4 *Résoudre le système d'équations différentielles :* $\begin{cases} x' &= 5x - 3y + te^{2t} \\ y' &= 3x - y + e^{2t} \end{cases}$

On peut trouver comme solution particulière : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\dfrac{t^3}{2} - t^2)e^{2t} \\ (\dfrac{t^3}{2} - 3\dfrac{t^2}{2} + t)e^{2t} \end{pmatrix}$

17.4 Résolution des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

$$x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + f(t) \qquad (\mathcal{E}) \qquad \text{avec } a, b \text{ et } f \text{ continues sur } I$$

$$(\mathcal{E}) \iff \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Conséquence 17.4.1 *L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (H) est un espace vectoriel de dimension 2.*

On a vu au dessus qu'on ne connaît pas de méthode générale permettant de trouver un système fondamental de l'équation homogène associée (H).

Résolution de (H) si on en connaît déjà 1 solution qui ne s'annule pas sur I
Soit u cette solution connue qui ne s'annule pas sur I. Alors $u'' = au' + bu$.
u ne s'annulant pas sur I et étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, on va chercher x solution de (H) sous la forme $x = zu$, ce qui revient à poser $z = \dfrac{x}{u}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
$x = uz$
$x' = u'z + uz'$
$x'' = u''z + 2u'z' + uz''$
x solution de $(H) \iff x'' = ax' + bx \iff ... \iff z'(2u' - au) + z''u = 0 \iff z'' = \left(a - \dfrac{2u'}{u}\right) z'$
On est ainsi ramené à résoudre une équation différentielle linéaire scalaire du 1er ordre d'inconnue z'. On détermine alors z' et en primitivant on détermine z, donc on connaît x et on sait ainsi résoudre (H).
On est ensuite amené à résoudre $(\mathcal{E})$ en se reportant aux méthodes rencontrées au-dessus.

Théorème 17.4.2 *Soit a, b et f des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.*
Soit (x_1, x_2) un système fondamental de solutions de l'équation différentielle scalaire homogène $x'' = ax' + bx$
Alors les solutions de l'équation différentielle scalaire $x'' = ax' + bx + f$ sont les fonctions $x = C_1x_1 + C_2x_2$ avec $C_,C_2$ fonctions de classe C^1 de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

$$\begin{cases} C_1'x_1 + C_2'x_2 = 0 \\ C_1'x_1' + C_2'x_2' = f \end{cases}$$

car ...

Exemple 17.4.3 *On considère l'équation (H) : $t^2x'' - 2t(t+1)x' + 2(t+1)x = 0$. On la résout sur $I =]0, +\infty[$.*
Montrer que (H) a une solution du type $t \to t^\alpha$ sur I.
Résoudre alors (H) sur I

...

Exemple 17.4.4 *Soit* $(\mathcal{E})\ :\ t^3x'' - tx' + x = \sin(1/t)$
L'équation homogène associée (H) *possède une solution simple. La trouver.*
Résoudre alors (H).
Résoudre $(\mathcal{E})$

...

Exemple 17.4.5 *On considère l'équation différentielle* $(H)\ :\ t^2(1-t)x'' - t(1+t)x' + x = 0.$
On la résoudra sur un intervalle I *à définir.*
Montrer que (H) *possède une solution développable en série entière. Reconnaître cette fonction.*
Vérifier que cette fonction est solution de (H) *sur* I.
Résoudre alors (H) *sur* I. *On obtient les solutions de* (H) *sur* I :
ce sont les fonctions $t \to \alpha \dfrac{t\ln|t|}{1-t} + \beta \dfrac{t}{1-t}$

17.5 Problèmes de recollement

Il s'agit de résoudre des équations du type

$$ax' + bx = c$$

ou

$$ax'' + bx' + cx = d$$

avec a, b, c, d continues sur I, et a s'annulant sur I.
La question est alors de savoir s'il y a des solutions de l'équation sur l'intervalle I.

Nous allons traiter cette question sur quelques exemples.
Remarquons que le théorème de Cauchy ne permet pas de conclure ni sur l'existence de solutions sur I, ni sur la dimension du sous espace des solutions de l'équation homogène sur I.

Exemple 17.5.1 $tx' = (t+1)x$.
La résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ *et sur* $\mathbb{R}_-^*$.
Donner les solutions de cette équation définies sur $\mathbb{R}^*$.
Parmi ces solutions, y en a-t-il prolongeables par continuité en 0 ? Les déterminer.
Ces solutions sont-elles dérivables en 0 ? sont-elles solutions de l'équation différentielle ?
Conclure sur les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$. *Quelle est la dimension de l'espace des solutions sur* $\mathbb{R}$ *?*

...

Exemple 17.5.2 $tx' = (t+2)x$.
La résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ *et sur* $\mathbb{R}_-^*$.
Donner les solutions de cette équation définies sur $\mathbb{R}^*$.
Parmi ces solutions, y en a-t-il prolongeables par continuité en 0 ? Les déterminer.
Ces solutions sont-elles dérivables en 0 ? sont-elles solutions de l'équation différentielle ?
Conclure sur les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$. *Quelle est la dimension de l'espace des solutions sur* $\mathbb{R}$ *?*

...

Exemple 17.5.3 $tx' = (t-1)x$.
La résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ *et sur* $\mathbb{R}_-^*$.
Donner les solutions de cette équation définies sur $\mathbb{R}^*$.
Parmi ces solutions, y en a-t-il prolongeables par continuité en 0 ? Les déterminer.
Ces solutions sont-elles dérivables en 0 ? sont-elles solutions de l'équation différentielle ?
Conclure sur les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$. *Quelle est la dimension de l'espace des solutions sur* $\mathbb{R}$ *?*

...

Exemple 17.5.4 $tx' = (t-1)x + 1 - t$.
Donner les solutions de cette équation définies sur $\mathbb{R}^*$.
Parmi ces solutions, y en a-t-il prolongeables par continuité en 0 ? Les déterminer.
Ces solutions sont-elles dérivables en 0 ? sont-elles solutions de l'équation différentielle ?
Conclure sur les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$.
Que dire du problème de Cauchy : $tx' = (t-1)x + 1 - t$ *avec* $x(2) = 3$ *?*

...

Exemple 17.5.5 $t^2x' = t(t-1)x - t$
Vérifier que la fonction $t \to \dfrac{1}{t}$ *est solution particulière de cette équation sur* $\mathbb{R}^*$.
Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}^*$.
Cette équation a-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ *?*

...

Chapitre 18

Calcul différentiel

Contents

18.1 Différentiabilité

E, F et G sont trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

18.1.1 Dérivée selon un vecteur

Définition 18.1.1 *Soit U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$.*
Soit $h \in E$.
On dira que f est dérivable en a selon le vecteur h si et seulement si la fonction de la variable réelle $t \to f(a+th)$ est dérivable en 0 i.e. $t \to \dfrac{f(a+th)-f(a)}{t}$ a une limite finie quand le réel t tend vers 0.
Dans ce cas, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+th)-f(a)}{t}$ est appelé vecteur dérivé de f en a selon le vecteur h et se note parfois $D_h f(a)$.

Remarque 18.1.2 *U ouvert et $a \in U$. Alors $\exists r > 0$ tel que la boule ouverte $B(a,r) \subset U$.*
Alors pour $h \neq 0$, la fonction $t \to f(a+th)$ est définie sur $]-r/\|h\|, r/\|h\|[$, et donc l'étude de sa dérivabilité en 0 est légitime.

Exemple 18.1.3 *$E = U = \mathbb{R}^2$, $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \to 2x^3y \end{cases}$, $a = (1,1)$ et $h = (1,2)$.*
Déterminer, si elle existe la dérivée de f en a selon h.

Exemple 18.1.4 *$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \to (e^x + yz, e^{2y+z}) \end{cases}$, $a = (1,0,1)$ et $h = (1,-1,-1)$.*
Montrons que f a un vecteur dérivé en a selon h et le calculer. On trouvera $D_{(1,-1,-1)}f(1,0,1) = (e-1,-3e)$.

Exemple 18.1.5 *$E = \mathbb{R}^2$ et $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. $f : \begin{cases} U & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \to x^2 + \dfrac{1}{y} \end{cases}$, $a = (1,1)$ et $h = (1,2)$.*
Montrer que f a une dérivée en a selon h à déterminer.

Proposition 18.1.6 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*
f a une dérivée en a selon $h \Longrightarrow f$ a une dérivée en a selon λh et $D_{\lambda h}f(a) = \lambda D_h f(a)$.

car si $\lambda \neq 0$, alors soit $\varphi : t \to f(a+th)$ et $\psi : t \to f(a+t\lambda h)$. $\forall t$ tel que $max(|t|,|\lambda t|) < \dfrac{r}{\|h\|}$, $\psi(t) = \varphi(\lambda t)$, i.e. $|t| < min(\dfrac{r}{\|h\|}, \dfrac{r}{|\lambda|\,\|h\|})$. Or φ dérivable en 0 donc ψ aussi et $\psi'(0) = \lambda\varphi'(0)$, i.e. $D_{\lambda h}f(a) = \lambda D_h f(a)$.
Si $\lambda = 0$ alors l'application φ est constante, donc de dérivée nulle, d'où $D_{\lambda h}f(a) = 0$ et $\lambda D_h f(a) = 0$, il y a encore égalité.

18.1.2 Dérivée selon les vecteurs d'une base

Définition 18.1.7 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$. La dérivée de f en a selon le vecteur e_k, si elle existe, est appelée dérivée partielle de f en a selon sa k^{ieme} coordonnée (dans $\mathcal{B}$) et se note souvent, s'il n'y a qu'une seule base en jeu : $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.*
Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = D_{e_k}f(a) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+te_k) - f(a)}{t}$.

Exemple 18.1.8 *Reprendre l'exemple 18.1.5. $E = \mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (i,j)$ avec $i = (1,0)$ et $j = (0,1)$. Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.*

ATTENTION f a des dérivées en a selon tous les vecteurs de $\mathcal{B} \not\Rightarrow f$ a des dérivées en a selon tous les vecteurs de E.

Exemple 18.1.9 *$\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (i,j)$ avec $i = (1,0)$ et $j = (0,1)$. Soit $f : (x,y) \to \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.*

1. *En revenant à la définition, montrer que f a une dérivée en $(0,0)$ selon le vecteur $(1,0)$ et selon le vecteur $(0,1)$.*
2. *Qu'en conclure sur $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?*
3. *Étudier l'existence de la dérivée de f en $(0,0)$ selon le vecteur $(1,1)$.*
4. *Remarque complémentaire : f est-elle continue en $(0,0)$?*

18.1.3 Expression dans une base de F d'une dérivée selon un vecteur

Proposition 18.1.10 *Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_p)$ une base de F.*
U un ouvert de E et $f : U \to F$.

Notons $f_1, ..., f_p$ les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}'$, i.e. $\forall x \in U,\ f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)e'k$

où $f_k : U \to \mathbb{R}$.
Soit $a \in U$ et $h \in E$.
f a une dérivée en a selon $h \iff \forall k \in [\![1, p]\!],\ f_k$ a une dérivée en a selon h

et alors $D_h f(a) = \sum_{k=1}^{p} D_h f_k(a) e'_k$.

car $\varphi : t \to \dfrac{f(a+th) - f(a)}{t} = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{f_k(a+th) - f_k(a)}{t} e'_k$ $(*)$ et on sait qu'une fonction vectorielle a une limite en un point si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées a une limite en ce point. Donc φ a une limite finie en 0 si et seulement si $\forall k,\ \varphi_k : t \to \dfrac{f_k(a+th) - f_k(a)}{t}$ a une limite finie en 0, c'est à dire si et seulement si $\forall k \in [\![1, p]\!],\ f_k$ est dérivable en a selon h.
L'égalité finale est alors la conséquence de (*).

18.1.4 Différentiabilité en un point

Définition 18.1.11 *U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to F$.*
On dira que f est différentiable en a
$\iff \exists \ell_a \in L(E, F)$ tq $\forall h \in E$ tq $a + h \in U,\ f(a+h) = f(a) + \ell_a(h) + \|h\|\,\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$
où ε est définie au voisinage de 0_E et à valeurs dans F.

On dit aussi que f possède un DL_1 en a.

Théorème 18.1.12 *f différentiable en $a \Longrightarrow f$ continue en a*

car E étant de dimension finie, ℓ_a est continue sur E (comme toute application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie).
Alors $\lim\limits_{h \to 0} \ell_a(h) = \ell_a(0) = 0$ et donc $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$, f est ainsi continue en a.

Théorème 18.1.13 *f est différentiable en $a \Longrightarrow \forall h \in E,\ f$ a une dérivée en a selon h*
et alors $D_h f(a) = \ell_a(h)$.

car ...

Remarque 18.1.14 *$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = D_{e_k} f(a) = \ell_a(e_k)$.*

Matriciellement, dans les bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F, la matrice colonne de $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ est donc la $k$ème colonne de la matrice de ℓ_a .

Conséquence 18.1.15 *Si f est différentiable en a, alors $\ell_a \in L(E, F)$ est unique.*
On l'appelle l'application différentielle de f en a. On la note df_a ou $df(a)$. Donc avec ces notations,

$$\forall h \text{ tq } a + h \in U,\ f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\,\varepsilon(h) \qquad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

$df_a(h)$ ne note aussi $df(a).h$

Exemple 18.1.16 *Soit* $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to (3x^2+y, xy) \end{cases}$ *et* $a=(1,2)$*. Montrons que* f *est différentiable en* a *et donner la matrice de* df_a *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$

Proposition 18.1.17 *Soit* f *différentiable en* a*,* $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ *une base de* E*.*
Pour $h=\sum_{k=1}^{n} h_k e_k$*, alors* $df_a(h)=\sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

C'est le théorème 18.1.13 en utilisant le fait que df_a est linéaire :
$df_a(h)=\sum_{k=1}^{n} h_k df_a(e_k)=\sum_{k=1}^{n} h_k D_{e_k} f(a)=\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k.$

Notation 18.1.18 *L'application* df_a *se note* $df_a=\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) dx_k$ *où* $dx_k : (x_1,...,x_n) \to x_k$*.*

Proposition 18.1.19 *Soit* $f : U \to F$ *et* $\mathcal{B}'=(e'_1,...,e'_p)$ *une base de* F*.*
Notons $f_1,...,f_p$ *les fonctions coordonnées de* f *dans* $\mathcal{B}'$ *:* $f=\sum_{j=1}^{p} f_j e'_j$ *où* $f_j : U \to \mathbb{R}$*.*
Soit $a \in U$*.*
f *est différentiable en* a *si et seulement si* $\forall j \in [\![1,p]\!]$*,* f_j *est différentiable en* a *et alors*
$\forall h$ *tq* $a+h \in U$*,* $df_a(h)=\sum_{j=1}^{p} df_j(a)(h) e'_j$*.*

car ...

18.1.5 Application différentiable sur un ouvert

Définition 18.1.20 $f : U \to F$*.*
On dira que f *est différentiable sur* U *si et seulement si* f *est différentiable en tout point de* U*.*
On appelle alors application différentielle de f *sur* U *l'application* $df : \begin{cases} U & \to L(E,F) \\ a & \to df_a \end{cases}$

Exemple 18.1.21 f *constante sur* $U \Longrightarrow f$ *différentiable sur* U *et* $df=0$*.*

car $\forall a \in U,\ f(a+h)=f(a)=f(a)+0(h)+\|h\|\,0$ et donc $\forall a \in U,\ df(a)=0$.

Exemple 18.1.22 $f \in L(E,F)$*, alors* f *est différentiable sur* E *et* $\forall a \in U,\ df_a=f$*.*

car $\forall a \in E,\ \forall h \in E, f(a+h)=f(a)+f(h)=f(a)+f(h)+\|h\|\,0$ et donc f est différentiable en a et $df_a=f$.
$df : \begin{cases} U & \to L(E,F) \\ a & \to f \end{cases}$

Exemple 18.1.23 *Cas où* $E=\mathbb{R}$ *et* $U=I$ *intervalle de* $\mathbb{R}$*.* $f : I \to F$*.* f *différentiable en* $a \Longleftrightarrow f$ *dérivable en* a *(voir chapitre "fonctions vectorielles") et* $df_a(h)=f'(a)h$*.*
f *différentiable sur* $I \Longleftrightarrow f$ *dérivable sur* I

18.1.6 Matrice Jacobienne

Définition 18.1.24 *E de dimension n et F de dimension p et U ouvert de E.*
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soit $a \in U$.
$f : U \subset E \to F$ différentiable en a.
On appelle matrice Jacobienne de f en a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice de l'application linéaire df_a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On la note souvent $J_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}f(a) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}df_a$

Exemple 18.1.25 *Reprendre les exemples 18.1.3 et 18.1.16, et dans chaque cas donner la matrice Jacobienne de f en a dans les bases canoniques de E et F.*

Exemple 18.1.26 : $\begin{cases} (\mathbb{R}^*)^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \to (\frac{1}{x}, \frac{x}{y}, xy) \end{cases}$, *et $a = (x_0, y_0) \in R^{*2}$.*
Montrer que f est différentiable en (x_0, y_0) et donner la matrice Jacobienne de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Proposition 18.1.27 *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.*

Alors $$J_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

car la colonne j de la matrice de df_a est constituée des coordonnées de $df_a(e_j) = D_{e_j}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Cas particulier où $E = F$

Alors $df_a \in L(E)$. Dans une base $\mathcal{B}$ de E, la matrice Jacobienne est une matrice carrée. Dans ce cas on appelle Jacobien de f en a le déterminant de la matrice Jacobienne de f en a.
Le Jacobien de f en a est donc

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix}$$

18.2 Opérations sur les applications différentiables

18.2.1 Combinaisons linéaires

Théorème 18.2.1 *Soit $f, g : U \subset E \to F$. Soit $a \in U$.*
f et g différentiables sur U (resp en a) $\Longrightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda f + \mu g$ est différentiable sur U (resp en a) et $d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$ (resp $d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$)

car ...

18.2.2 Différentielle de $B(f, g)$ où B est une application bilinéaire et f et g différentiables

Théorème 18.2.2 *Soit $f, g : U \subset E \to F$ différentiables sur U.*
$B : F \times F \to G$ application bilinéaire.
Alors $B(f, g)$ est différentiable sur U et $d(B(f, g)) = B(df, G) + B(f, dG)$,i.e.
$\forall a \in U,\ \forall h \in E$ tq $a + h \in U,\ d(B(f, g))_a(h) = B(df_a(h), g(a)) + B(f(a), dg_a(h))$.

car ...

Exemple 18.2.3 *Soit $f : U \to F$, $g : U \to F$. On suppose que F est muni d'un produit scalaire.*
f et g différentiables sur $U \Longrightarrow < f, g >$ différentiable sur U et
$\forall a \in U,\ d < f, g >_a = < df_a, g(a) > + < f(a), dg_a >$.

Exemple 18.2.4 *$f : U \to \mathbb{R}^3$, $g : U \to \mathbb{R}^3$ différentiables sur U, où $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel.*
Alors $f \wedge g$ est différentiable sur U et $\forall a \in U,\ d(f \wedge g)_a = df_a \wedge g(a) + f(a) \wedge dg_a$.

Exemple 18.2.5 *$f : U \to \mathbb{R}^3$, $g : U \to \mathbb{R}^3$, $h : U \to \mathbb{R}^3$ différentiables sur U où $\mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique.*
Alors $det(f, g, h)$ est différentiable sur U et
$\forall a \in U,\ d(det(f, g, h))_a = det(df_a, g(a), h(a)) + det(f(a), dg_a, h(a)) + det(f(a), g(a), dh_a)$.

18.2.3 Différentielle d'une composée d'applications différentiables

Théorème 18.2.6 *E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie.*
U ouvert de E et V ouvert de F.
$f : U \to F$ et $g : V \to G$ avec $f(U) \subset V$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ différentiable sur } U \\ \\ g \text{ différentiable sur } V \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ différentiable sur } U \text{ et } \forall a \in U,\ d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

car ...

Conséquence 18.2.7 *sur les matrices jacobiennes :*

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{B}_1 \text{ base de } E\\[2em] \mathcal{B}_2 \text{ base de } F\\[2em] \mathcal{B}_3 \text{ base de } G\end{array}\right\} \text{et les mêmes hypothèses sur } f, g.$$

Alors $J_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(g\circ f)(a) = J_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}g(f(a)) \times J_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}f(a)$

18.2.4 Règle de la chaine

Théorème 18.2.8 *U ouvert de $\mathbb{R}^m$, V ouvert de $\mathbb{R}^p$ et W ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
$\varphi : U \to V$ et $f : V \to W$ tq φ différentiable sur U et f différentiable sur V.
Soit $F = f\circ\varphi$. Soit $a = (u_1, ..., u_m) \in U$ et $b = \varphi(a) = (x_1(a), ..., x_p(a))$, donc $F(a) = f(b)$.
alors $\forall j \in [\![1, m]\!]$, $\dfrac{\partial F}{\partial u_j}(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(a))\frac{\partial x_k}{\partial u_j}(a)$

en utilisant les matrices jacobiennes ....

Exemple 18.2.9 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$.*
Soit $F : \begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ t & \to f(t^2+1, t^3)\end{cases}$ *et $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $F'(a)$ en fonction des dérivées partielles de f en a.*

Exemple 18.2.10 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$.*
Soit $F \begin{cases}\mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}\\ (u, v, w) & \to f(uv + vw, 2u + 3v + 4w)\end{cases}$.
Soit $a = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
Après avoir justifié que F est différentiable sur $\mathbb{R}^3$, exprimer les dérivées partielles de F en a en fonction des coordonnées de a et des dérivées partielles de f

Exemple 18.2.11 *Soit f_1 et f_2 des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
Soit $F : \begin{cases}\mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2\\ (u, v) & \to (f_1(u^2+v^2, 2uv), f_2(3u+4v, 9u^2v))\end{cases}$
Après avoir justifié que F est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, exprimer les dérivées de F selon les vecteurs de base de $\mathbb{R}^2$ en fonction des dérivées partielles de f_1 et de f_2.

Exemple 18.2.12 ***À connaître : passage en coordonnées polaires.***
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas $(0,0)$. Pour tout $(x, y) \in U$ on pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable sur U. On pose $F(r, \theta) = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Exprimer $\dfrac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)$ *et* $\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)$ *en fonction des dérivées partielles de f et de r et θ.*

18.2.5 Dérivée le long d'un arc

Théorème 18.2.13 *Soit γ un arc paramétré de classe C^1 sur un intervalle ouvert I , à valeurs dans un ouvert U de E.*
Soit $f : U \to F$ différentiable.
Alors $f \circ \gamma$ est différentiable sur I et $\forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$.

car ...

18.2.6 Cas des fonctions numériques

$f : U \subset E \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. On sait que $df_a \in L(E, \mathbb{R})$, i.e. df_a est une forme linéaire sur E.

Théorème 18.2.14 ***Représentation des formes linéaires dans un eve***
E un eve et $\varphi \in L(E, \mathbb{R})$.
Alors $\exists! a \in E,\ \forall x \in E,\ \varphi(x) = < a, x >$.

car ...

Remarque 18.2.15 *Ce théorème est important, bien au delà de son application dans le cas des fonctions différentiables*

Définition 18.2.16 ***Gradient***
$f : U \subset E \to \mathbb{R}$ différentiable sur U et $a \in U$.
On appelle gradient de f en a l'unique vecteur de E noté $grad\, f(a)$ ou $\nabla f(a)$ défini par

$$\forall h \in E,\ df_a(h) = < grad\, f(a), h >$$

Un tel vecteur existe et est unique, vu le théorème précédent.

Remarque 18.2.17 *$f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.*
alors, $\forall h \in E$ tq $a + h \in U$, $f(a+h) = f(a) + < grad\, f(a), h > + \|h\|\, \varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Remarque 18.2.18

La dérivée de f en a selon le vecteur u est $D_u f(a) = df(a)(u) = < grad\, f(a), u >$.
Supposons u unitaire et $grad\, f(a) \neq 0$, alors $|< grad\, f(a), u >| \leqslant \|grad\, f(a)\|$ avec égalité si et seulement si les vecteurs u et $grad\, f(a)$ sont colinéaires.
Donc $grad\, f(a)$ est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.

Proposition 18.2.19 ***Expression du gradient dans une base orthonormée***
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E., et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.
Alors $grad\, f(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$

Car $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.

Alors $\forall h \in E,\ df_a(h) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) . \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k = < \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k, \sum_{k=1}^{n} h_k e_k >$,

et donc $grad\, f(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$

Exemple 18.2.20 ***Expression du gradient en coordonnées polaires.***

Soit E de dimension 2 et (e_1, e_2) une base orthonormée de E.
Soit f différentiable sur un ouvert U de E ne contenant pas le vecteur nul, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ posons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.
On note $u_\theta = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$ et $v_\theta = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$.
On note F la fonction telle que $\forall (x, y) \in U,\ f(xe_1 + ye_2) = F(r, \theta) = f(r\cos\theta e_1 + r\sin\theta e_2)$.

Montrer que $grad\, f(a) = \dfrac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) u_\theta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) v_\theta$

18.2.7 Extremums locaux d'une fonction numérique différentiable

Définition 18.2.21 *Soit U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$.*
On dira que f présente un maximum (local) en a si et seulement si $\exists V$ voisinage de a tel que $\forall x \in V,\ f(x) \leqslant f(a)$.
On dira que f présente un minimum (local) en a si et seulement si $\exists V$ voisinage de a tel que $\forall x \in V,\ f(x) \geqslant f(a)$.
On dira que f présente un extremum en a si et seulement si f présente un maximum en a ou f présente un minimum en a.

Donc f présente un extremum en a si et seulement si
$\exists V$ voisinage de a tq $V \subset U$ et $\begin{cases} \forall x \in V,\ f(x) \geqslant f(a) \\ \text{ou} \\ \forall x \in V,\ f(x) \leqslant f(a) \end{cases}$

Remarque 18.2.22 *f présente un maximum en a si et seulement si $-f$ présente un minimum en a.*
On peut donc toujours se ramener au cas d'un minimum.

Théorème 18.2.23 *Soit U ouvert de E, $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable sur U.*
f a un extremum en $a \Longrightarrow df_a = 0$, i.e. $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$, i.e. $grad\, f(a) = 0$

car ...

Définition 18.2.24 *Soit U un ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable sur U.*
On appelle point critique de f tout élément a de U tel que $df_a = 0$.
On appelle valeur critique de f toute valeur $f(a)$ lorsque a est un point critique.

On vient donc de prouver que f a un extremum en $a \Longrightarrow a$ est un point critique. La réciproque est fausse.

Exemple 18.2.25 $f : (x, y) \to x^2 + xy + y^2$.
Déterminer les points critiques de f.
f a-t-elle un extremum en ces points critiques ?

Exemple 18.2.26 $f : (x, y) \to x^2(1 + y) + y^3$.
Déterminer les points critiques de f.
f a-t-elle un extremum en ces points critiques ?

18.3 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

18.3.1 Définition

Définition 18.3.1 *Soit $f : U \subset E \to F$.*
On dira que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si $\begin{cases} f \text{ est différentiable sur } U \\ df \text{ est continue sur } U \end{cases}$

donc

Proposition 18.3.2 *Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E,*

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si $\begin{cases} f \text{ est différentiable sur } U \\ \text{et} \\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \text{ est continue sur } U \end{cases}$

De plus,

Proposition 18.3.3 *Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_p)$ une base de F, notons $f = \sum_{j=1}^{p} f_j e'_j$, où les fonctions f_j sont les fonctions coordonnées de f sur $\mathcal{B}'$: $f_j : U \to \mathbb{R}$.*

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si $\begin{cases} f \text{ est différentiable sur } U \\ \text{et} \\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ \dfrac{\partial f_j}{\partial x_k} \text{ est continue sur } U \end{cases}$

car une fonction est continue sur U si et seulement si ses fonctions coordonnées sont continues sur U ...

Exemple 18.3.4 *f une fonction constante sur U. On a vu dans l'exemple 18.1.21 que $\forall a \in U$, $df_a = 0$. Donc $df : \begin{cases} U & \to L(E, F) \\ a & \to 0 \end{cases}$, i.e. $df = 0$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U*

Exemple 18.3.5 *Reprenons l'exemple 18.1.26 :* $f : \begin{cases} U = (\mathbb{R}^*)^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \to (\frac{1}{x}, \frac{x}{y}, xy) \end{cases}$. *On a vu que f est différentiable sur U.*
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a vu que pour $(x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $J_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f(x,y) = \begin{pmatrix} -1/x^2 & 0 \\ 1/y & -x/y^2 \\ y & x \end{pmatrix}$

L'application $(x,y) \to J_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} f(x,y)$ est continue sur U.
Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

18.3.2 Caractérisation par les dérivées partielles

Théorème 18.3.6 *Soit $f : U \subset E \to F$ et $\mathcal{B}$ une base de E.*
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U $\iff$ $\begin{cases} \textit{Les dérivées partielles par rapport aux vecteurs de base existent en tout point, et} \\ \textit{ces dérivées partielles sont continues sur } U \end{cases}$

Théorème admis.
L'intérêt de ce théorème c'est qu'il n'est plus nécessaire de prouver la différentiablilité de f sur U, cette différentiablilité est acquise par l'existence et la continuité des dérivées partielles de f.

Exemple 18.3.7 $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \to \left(x^2+3y, \dfrac{1}{x^2+y^2+1}, e^{x+3y}\right) \end{cases}$. *Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (et donc différentiable), et donner sa matrice Jacobienne dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.*

18.3.3 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

On note $C^1(U,F)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur U à valeurs dans F.

Théorème 18.3.8 *$C^1(U,F)$ est un espace vectoriel.*

car ...

Théorème 18.3.9 *Soit $f, g \in C^1(U,E)$ et $B : E \times E \to F$ une application bilinéaire.*
Alors $B(f,g)$ est de classe C^1 sur U

car ...

Théorème 18.3.10 *E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie. U ouvert de E et V ouvert de F.*
$f : U \to F$ tq $f(U) \subset V$ et $g : V \to G$.
f de classe C^1 sur U et g de classe C^1 sur $V \Longrightarrow g \circ f$ de classe C^1 sur U.

car ...

Conséquence 18.3.11 *— Les fonctions polynômes de n variables sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.*
— Les fraction rationnelles de n variables sont de classe C^1 sur leur ensemble de définition.

18.3.4 Accroissement d'une fonction

Théorème 18.3.12 *Soit $f : U \subset E \to F$ de classe C^1 sur U.*
Soit $\gamma : [0,1] \to U$ de classe C^1 sur $I = [0,1]$.
On pose $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
Alors $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\, dt$

car ...

Théorème 18.3.13 ***Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs.***
*Soit U un ouvert **connexe par arcs**, et $f : U \to F$ de classe C^1 sur U.*
f est constante sur $U \iff df = 0$.

On a déjà vu au 18.3.4 le sens direct
Montrons la réciproque ...

18.4 Dérivées partielles d'ordre supérieur

18.4.1 Définition

Définition 18.4.1 *Soit $f : U \subset E \to F$ avec U ouvert.*
$\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $a \in U$.
On suppose que la fonction $D_{e_i} f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe au voisinage de a.
Si cette fonction admet une dérivée en a selon le vecteur e_j, alors cette dérivée $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ se notera $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.
Dans le cas où $j = i$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$ se notera $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$.

Par récurrence, de proche en proche, on peut définir des dérivées partielles d'ordre 3, 4 ...

Exemple 18.4.2 *$f : (x, y, z) \to (x^2 + xyz, y^2 + z^2)$.*

1. *Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. Donner sa matrice jacobienne dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.*
2. *Justifier que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont elles aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.*
3. *Déterminer les fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$*

18.4.2 Le théorème de Schwarz

Théorème 18.4.3 *Sous les mêmes hypothèses qu'au dessus,*
Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *sont continues sur* U*, alors*
$\forall a \in U,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Théoréme admis.
voir un exemple ci dessus.
ATTENTION : on connait des fonctions pour lesquelles $\exists a \in U / \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Exemple 18.4.4 *Soit* $f : (x, y) \to \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. *Montrer que* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$
2. *Déterminer, si c'est possible,* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$
3. *Que dire de la continuité de* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *et* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *en* $(0, 0)$ *?*

18.4.3 Fonctions de classe C^k

Théorème 18.4.5 *Soit* $f : U \subset E \to F$ *de classe* C^1 *sur* U*.*
Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\exists \mathcal{B}$ *base de* E *dans laquelle les dérivées partielles de* f *sont de classe* C^1
2. $\forall h \in E,\ D_h f : a \to D_h f(a)$ *est de classe* C^1 *sur* U
3. *Les dérivées partielles de* f *par rapport à toute base de* E *sont de classe* C^1 *sur* U
4. df *est de classe* C^1 *sur* U *(à valeurs dans* $L(E, F)$*).*

car ...

Définition 18.4.6 *Une fonction* f *est de classe* C^2 *sur* U *si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés du théorème ci-dessus.*
On note $C^2(U, F)$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^2 *sur* U *à valeurs dans* F*.*

Remarque 18.4.7 *Le théorème de Schwarz est applicable aux fonctions de classe* C^2 *sur* U*.*

Définition 18.4.8 *On dira que* f *est de classe* C^k *sur* U *si et seulement si* f *admet toutes les dérivées partielles dans une base à tout ordre inférieur ou égal à* k *et si toutes ces dérivées partielles sont continues sur* U*.*

Proposition 18.4.9 ***Opérations sur les fonctions de classe*** C^k ***sur*** U

— *Toute combinaison linéaire de fonctions de classe* C^k *sur* U *est de classe* C^k *sur* U*.*
— $f : U \to F$ *et* $g : V \subset F \to G$ *avec* $f(U) \subset V$*.*
  f *de classe* C^k *sur* U *et* g *de classe* C^k *sur* $V \Longrightarrow g \circ f$ *de classe* C^k *sur* U*.*
— $f : U \to F$ *et* $g : U \to F$*.* B *application bilinéaire sur* F*.*
  f *et* g *de classe* C^k *sur* $U \Longrightarrow B(f, g)$ *de classe* C^k *sur* U*.*

Cas particulier 18.4.10 ***cas des fonctions à valeurs dans*** $\mathbb{R}$.
- *Le produit de fonctions de classe C^k sur U est de classe C^k sur U*
- *f de classe C^k sur U et f ne s'annule pas sur $U \Longrightarrow \dfrac{1}{f}$ est de classe C^k sur U.*

Exemple 18.4.11 *Les fonctions polynomiales de n variables sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$*
Les fractions rationnelles de n variables sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition.

18.4.4 Exemples d'équations aux dérivées partielles

• **Equations du type** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ **sur l'ouvert** $U =]a,b[\times]c,d[$

Le but est de déterminer les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $U =]a,b[\times]c,d[$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$

Théorème 18.4.12 *f de classe C^1 sur $U =]a,b[\times]c,d[$ est solution de $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Longleftrightarrow$ $\exists \varphi :]c,d[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $]c,d[$ tq $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = \varphi(y)$*

car ...

• **Equations du type** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x)$ **sur l'ouvert** $U =]a,b[\times]c,d[$ **avec** g **continue sur** $]a,b[$

Là encore on cherche les fonctions de classe C^1 sur U solutions.
Notons G une primitive de g sur $]a,b[$.
Alors f est solution si et seulement si $\exists h$ de classe C^1 sur $]c,d[$ tq $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = G(x) + h(y)$.
car ...

• **Equations du type** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)$ **sur l'ouvert** $U =]a,b[\times]c,d[$ **avec** g **continue sur** $]a,b[\times]c,d[$

Là encore on cherche les fonctions de classe C^1 sur U solutions. L'idée consiste à chercher une primitive de la fonction $x \to g(x,y)$ pour y fixé.

Exemple 18.4.13 *Déterminer les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ solutions de $\dfrac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2$.*

• **Equations du type** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = g(x,y)$ **sur l'ouvert** $U =]a,b[\times]c,d[$ **avec** g **continue sur** $]a,b[\times]c,d[$

Exemple 18.4.14 *Déterminer les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = x$*

Exemple 18.4.15 *Déterminer les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$*

• **Utilisation d'un changement de variable**

Changement de variable affine : Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = k$ avec k constante.

On s'aidera du changement de variable affine : $u = x + y$, $v = x - y$.

Changement de variable en polaire : Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ solutions de : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2 + y^2)$
On pourra utiliser le changement de variable polaire $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Déterminer les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ solutions de : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 - y^2$.
On pourra utiliser le changement de variable $u = x + y$, $v = x - y$

18.5 Vecteurs tangents et lignes de niveaux

18.5.1 Vecteurs tangents

Définition 18.5.1 *Soit X une partie de E, $a \in X$ et v un vecteur de E.*
On dit que v est tangent à X en a si et seulement si il existe γ arc paramétré défini sur $[-1, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ tel que γ est à valeurs dans X, et $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$

Exemple 18.5.2 *$E = \mathbb{R}^3$ et (Σ) la sphère unité.*
Soit $M \in (\Sigma)$, alors tout vecteur v tel que $\overrightarrow{OM} \perp v$ est tangent à (Σ) en M

car ...

Exemple 18.5.3 *$E = \mathbb{R}^3$ et X le cylindre circulaire droit d'axe $(O, \vec{k})$ et de rayon 1. Soit $M \in X$.*
- *Alors $\vec{k}$ est tangent à X en M*
- *Soit P le plan orthogonal à $\vec{k}$ et passant par M. Alors $P \cap X$ est un cercle. Tout vecteur tangent à ce cercle en M est tangent à X en M.*

car ...

Théorème 18.5.4 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1.*
Soit X la nappe définie par f, i.e. la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = f(x, y)$.

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in X$ *avec* $(x_0, y_0) \in U$ *et* $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Alors l'ensemble des vecteurs tangents à X en M_0 est le plan $Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\right\}$

car ...

Conséquence 18.5.5 *M est dans le plan tangent à X en M_0 $\iff$ $\overrightarrow{M_0M}$ est combinaison linéaire de* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{vmatrix} x-x_0 & 1 & 0 \\ y-y_0 & 0 & 1 \\ z-f(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + (z-f(x_0,y_0) = 0$$

$$\iff z = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Exemple 18.5.6 *Soit (Σ) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$.*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$. *Déterminons l'équation du plan tangent à* (Σ) *en* A.

18.5.2 Lignes de niveaux

Définition 18.5.7 *Soit* $f : U \subset E \to \mathbb{R}$.
Pour k *réel, on appelle ligne de niveau* k *de* f *l'ensemble* $L_k = \{u \in U / f(u) = k\}$.
On dira qu'un ensemble L *est une ligne de niveau si et seulement si* $\exists k \in \mathbb{R}$ *tel que* $L = L_k$

Théorème 18.5.8 E *eve,* $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1
Soit $k \in \mathbb{R}$ *et* L_k *la ligne de niveau* k.
Les vecteurs tangents à L_k *en un point* a *de* L_k *sont orthogonaux à* $grad\, f_a$.

car ...