# Chapitre 11

# Endomorphismes des espaces euclidiens

Dans toute la suite $E$ désignera un espace vectoriel euclidien de dimension $n$.

## 11.1 Isométries vectorielles

### 11.1.1 Groupe orthogonal

**Définition 11.1.1** *Soit $u \in L(E)$.*
*On dira que $u$ est un automorphisme orthogonal (on dit aussi isométrie vectorielle) de $E$ si et seulement si $u$ conserve la norme, i.e. $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.*
*L'ensemble des isométries vectorielles se note $\mathcal{O}(E)$.*

**Proposition 11.1.2** *Un automorphisme orthogonal est bien un automorphisme ...*

Car $x \in Ker(u) \Longrightarrow u(x) = 0 \Longrightarrow \|u(x)\| = 0 \Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$.

**Théorème 11.1.3** *Soit $u \in L(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$u \in \mathcal{O}(E)$, i.e. $u$ conserve la norme*
2. *$u$ conserve le produit scalaire , i.e. $\forall x, y \in E,\ < u(x), u(y) >=< x, y >$.*
3. *L'image par $u$ de toute base orthonormale est une base orthonormale*
4. *Il existe $\mathcal{B}$ base orthormale de $E$ dont l'image par $u$ est une base orthonormale*
5. *Il existe $\mathcal{B}$ base orthormale de $E$ tq si $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ alors ${}^tA.A = I_n$.*
6. *Il existe $\mathcal{B}$ base orthormale de $E$ tq si $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ alors $A.{}^tA = I_n$.*

car ...

**Proposition 11.1.4**

1. *$\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$, appelé groupe orthogonal.*
2. *$\forall u \in \mathcal{O}(E),\ |det(u)| = 1$.*
3. *$SO(E) = \{u \in \mathcal{O}(E)/det(u) = 1\}$ est un sous groupe de $\mathcal{O}(E)$ appelé groupe spécial orthogonal, ou groupe des rotations vectorielles de $E$. Cet ensemble se note aussi $\mathcal{O}^+(E)$*

Car ...

**Notation 11.1.5** *L'ensemble* $\mathcal{O}(E) \setminus SO(E)$ *se note* $\mathcal{O}^-(E) = \{u \in \mathcal{O}(E)/det(u) = -1\}$

**Exemple 11.1.6** *Soit* $F$ *un sev de* $E$*. On sait que* $E = F \oplus F^\perp$*.*
*Soit* $s$ *la symétrie orthogonale par rapport à* $F$*. Alors* $s \in \mathcal{O}(E)$*.*

Car ...

**Exemple 11.1.7** *Soit* $F$ *un sev de* $E$ *distinct de* $E$*. On sait que* $E = F \oplus F^\perp$*.*
*Soit* $p$ *la projection orthogonale sur* $F$*. Alors* $p \notin \mathcal{O}(E)$*, car* $p$ *n'est pas bijective.*

**Exemple 11.1.8** $Dim(E) = 2$ *et soit* $\mathcal{B} = (i, j)$ *une base orthonormée de* $E$*.*
*Soit* $u \in L(E)$ *tq* $\exists \theta \in \mathbb{R},\ Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$*. Alors* $u \in SO(E)$ *car ...*

### 11.1.2 Matrices orthogonales

**Définition-théorème 11.1.9** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. On dira que* $A$ *est une matrice orthogonale si et seulement si* $A$ *vérifie une des propriétés ci-dessous équivalentes :*

1. $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *et* ${}^tA = A^{-1}$.
2. $A.{}^tA = I_n$
3. ${}^tA.A = I_n$
4. ${}^tA$ *est orthogonale*
5. *Les colonnes de* $A$ *forment une famille orthonormale de* $\mathbb{R}^n$ *pour son produit scalaire usuel.*
6. *Les lignes de* $A$ *forment une famille orthonormale de* $\mathbb{R}^n$ *pour son produit scalaire usuel.*

*L'ensemble des matrices orthogonales de taille* $n$ *se note* $\mathcal{O}(n)$*.*

car ...

**Proposition 11.1.10** *Soit* $\mathcal{B}$ *une base orthonormée de* $E$*. Soit* $u \in L(E)$ *et* $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$*.*

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff A \in \mathcal{O}(n)$$

car ...

**Exemple 11.1.11** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$*. Cette matrice est-elle orthogonale ?*

**Exemple 11.1.12** *Soit* $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 & a \\ 0 & 1/3 & b \\ -1/\sqrt{2} & 2/3 & c \end{pmatrix}$*. Déterminer* $a, b, c$ *en sorte que* $B \in \mathcal{O}(3)$

**Proposition 11.1.13**

1. $\mathcal{O}(n)$ *est un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{R})$*.*
2. $A \in \mathcal{O}(n) \Longrightarrow |det(A)| = 1$*. (Réciproque fausse)*
3. $SO(n) = \{A \in \mathcal{O}(n)/det(A) = 1\}$ *est un sous-groupe de* $\mathcal{O}(n)$ *; il est appelé groupe spécial orthogonal d'ordre* $n$*. Cet ensemble se note aussi* $\mathcal{O}^+(n)$*.*
   *L'ensemble* $\mathcal{O}(n) \setminus SO(n)$ *se note* $\mathcal{O}^-(n) = \{A \in \mathcal{O}(n)/det(A) = -1\}$

Car ...

**Proposition 11.1.14** *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $E$, et soit $\mathcal{B}'$ une base de $E$.*
*Soit $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.*

$$\mathcal{B}' \text{ est orthonormale} \iff P \in \mathcal{O}(n)$$

car ...

**Remarque 11.1.15** *Soit $M$ inversible, alors $M^{-1} = \dfrac{1}{det(M)}\,{}^t(com(M))$.*

*Donc,* $M \in \mathcal{O}(n) \iff {}^tM = \dfrac{1}{det(M)}\,{}^t(com(M)) \iff M = \dfrac{com(M)}{det(M)}$

*Donc* $M \in SO(n) \iff \begin{cases} \text{ses colonnes forment une base orthonormale de } \mathbb{R}^n \text{ pour le produit scalaire usuel de } \mathbb{R}^n \\ \text{un de ses coefficients non nuls est égal à son cofacteur} \end{cases}$

**Exemple 11.1.16** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$. *Dire si $A$ est dans $SO(3)$.*

### 11.1.3 Orientation de $E$

**Définition 11.1.17** *Orienter $E$ c'est choisir (fixer) une base orthonormale $\mathcal{B}_0$, qu'on appellera directe.*

**Définition 11.1.18** *Une orientation de l'espace étant fixée (par la donnée de $\mathcal{B}_0$).*
*Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormale, et $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}'$. On dira que $\mathcal{B}'$ est directe si et seulement si $P \in SO(n)$. Sinon, on dira que $\mathcal{B}'$ est indirecte.*

**Proposition 11.1.19** *Une orientation de l'espace étant fixée (par la donnée de $\mathcal{B}_0$).*
*Soit $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ deux bases orthonormales ; soit $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$.*
*$\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ ont la même orientation si et seulement si $P \in SO(n)$.*

car ...

### 11.1.4 Stabilité et orthogonalité

**Théorème 11.1.20** *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$ et les sev propres sont orthogonaux*

car ...

**Conséquence 11.1.21** *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. $u$ est diagonalisable si et seulement si $u$ est une symétrie vectorielle orthogonale.*
*En d'autres termes, les seuls automorphismes orthogonaux diagonalisables sont les symétries orthogonales.*

car ...

**Théorème 11.1.22** *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Soit $F$ un sev de $E$ stable par $u$.*
*Alors $F^\perp$ est stable par $u$ et $u_{|F} \in \mathcal{O}(F)$ , $u_{|F^\perp} \in \mathcal{O}(F^\perp)$.*

car ...

**Théorème 11.1.23** *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. $Ker(u - id)$ et $Im(u - id)$ sont des sev supplémentaires orthogonaux.*

car ...

**Théorème 11.1.24** *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. $Ker(u - id) \perp Ker(u + id)$ .*

car ...

### 11.1.5 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans ce paragraphe, $E_2$ est de dimension 2.

**Théorème 11.1.25** *Les éléments de $\mathcal{O}(2)$ sont :*

— *les matrices* $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ *pour $\theta \in \mathbb{R}$ ; ce sont les éléments de $SO(2)$ i.e. $\mathcal{O}^+(2)$*

— *les matrices* $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ *pour $\theta \in \mathbb{R}$ ;*
*ce sont les éléments de $\mathcal{O}(2) \setminus SO(2) = \mathcal{O}^-(2)$*

car ...

**Corollaire 11.1.26** *Soit $u \in SO(E_2)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $E_2$.*
*Alors $\exists \theta \in \mathbb{R},\ Mat_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$.*
*On dit que $u$ est la rotation d'angle $\theta$.*

**Conséquence 11.1.27** *$(SO(2), \times)$ est un groupe abélien.*

**Corollaire 11.1.28** *Les éléments de $\mathcal{O}^-(E_2)$ sont les endomorphismes dont la matrice dans une base orthonormale est du type $S_\theta$.*
*Or un calcul simple montre que $S_\theta^2 = I_2$.*

D'où la propriété

**Proposition 11.1.29** *Donc les éléments de $\mathcal{O}^-(E_2)$ sont les symétries orthogonales par rapport à une droite.*

car ...

**Proposition 11.1.30** *Pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta'} R_\theta = R_{\theta+\theta'}$ et donc $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.*

Clair : calcul matriciel.

**Conséquence 11.1.31** *Soit $u \in SO(E_2)$.*
*Alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tq $\forall \mathcal{B}$ base orthonormale directe, $Mat_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$.*

$\theta$ ne dépend pas de la base orthonormale directe.

**Proposition 11.1.32** *Soit $u \in SO(E_2)$. $u \notin \{id, -id\} \Longrightarrow u$ n'est pas diagonalisable, i.e. $R_\theta$ diagonalisable si et seulement si $\theta \equiv 0 \mod \pi$*

car ...

**Proposition 11.1.33** *Soit $u \in SO(E_2)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$. Alors $\forall x \neq 0,\ (\widehat{x, u(x)}) \equiv \theta \mod 2\pi$*

car ...

**Proposition 11.1.34** *Soit $u \in \mathcal{O}^-(E_2)$.*
*Alors $u$ est diagonalisable, et $\exists \mathcal{B}$ base orthonormale de $E_2$ tq* $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

car ...

### 11.1.6 Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale

**Théorème 11.1.35** *Soit $u \in L(E)$ et $E$ un ev réel de dimension finie. Il existe une droite ou un plan stable par $u$.*

Car ...

**Remarque 11.1.36** *C'est un théorème qui est vrai même si $E$ n'est pas muni d'un produit scalaire .*

***Théorème 11.1.37 Réduction des isométries vectorielles***
*Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et soit $u \in \mathcal{O}(E)$.*
*Il existe une base orthonormée de $E$, $\mathcal{B}$, tq $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice diagonale par blocs :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & 0 & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_s) \end{pmatrix} \text{ où } R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

*avec $\theta \not\equiv 0 \mod \pi$, et $p, q, s \in \mathbb{N}$ tq $p + q + 2s = n$*

Car ...

### 11.1.7 Produit vectoriel dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3

Dans ce paragraphe, $E$ est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

**Définition-théorème 11.1.38** *Soit $x, y, z$ trois vecteurs de $E$.*
*$det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ orthonormée **directe** choisie.*
*Ce déterminant s'appelle produit mixte des vecteurs $x, y, z$.*

car ...

**Définition-théorème 11.1.39** *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe et $x, y \in E$. Alors $\exists! a \in E$ tq $\forall z \in E,\ det_{\mathcal{B}}(x, y, z) =< a, z >$*
*Ce vecteur $a$ s'appelle produit vectoriel de $x$ par $y$ et se note $a = x \wedge y$.*
*Le vecteur $x \wedge y$ ne dépend pas de la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ choisie.*

car ...
La démonstration permet de conclure aussi :

**Proposition 11.1.40** *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe, soit $x, y$ vecteurs de $E$ de matrices colonnes des coordonnées dans $\mathcal{B}$ : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Alors le vecteur $x \wedge y$ a pour matrice colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}$ : $X \wedge Y = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$*

**Exemple 11.1.41** *Soit $x = (1,2,3)$ et $y = (3,2,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel. Déterminer $x \wedge y$.*
*Même question avec $x = (0,1,0)$ et $y = (0,0,1)$.*

**Proposition 11.1.42** — *L'application $\begin{cases} E^2 & \to E \\ (x,y) & \to x \wedge y \end{cases}$ est bilinéaire.*

- *Elle est aussi antisymétrique, i.e. $\forall x, y,\ y \wedge x = -x \wedge y$*
- *$x \wedge y = 0 \iff x$ et $y$ sont liés.*
- *$(x \wedge y) \perp x$ et $(x \wedge y) \perp y$.*
- *Soit $= (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe.*
$$x = \sum_{k=1}^{3} x_k e_k \text{ et } y = \sum_{k=1}^{3} y_k e_k \Longrightarrow x \wedge y = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3$$

**Conséquence 11.1.43** *Soit $e_1$ et $e_2$ vecteurs de $E$ normés et orthogonaux. Alors $(e_1, e_2, e_1 \wedge e_2)$ est une base orthonormée directe.*

### 11.1.8 Groupe des rotations en dimension 3

$E$ est de dimension 3 et orienté.

**Théorème 11.1.44** *Soit $u \in SO(E)$.*
*Alors il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et il existe un réel $\theta$ tels que*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$$

*Si $u$ n'est pas l'identité, on appelle axe de cette rotation la droite $Ker(u - id)$ orientée par le vecteur $e_1$*
*Cet angle $\theta$ est indépendant de la base orthonormée directe choisie. On l'appelle "angle" de la rotation $u$.*

Car ...

**Conséquence 11.1.45** *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.*
*$u$ est un automorphisme orthogonal direct si et seulement si ($u = id$ ou $dim\ Ker(u - id) = 1$)*

car ...

**Remarque 11.1.46** *Avec les notations du théorème 11.1.44, $1 + 2\cos(\theta) = tr(u)$. On connait donc très facilement la valeur absolue de l'angle $\theta$.*

**Exemple 11.1.47** *On reprend l'exemple 11.1.16 $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$.*
*Déterminer l'axe orienté et l'angle de la rotation $u$.*

**Exemple 11.1.48** *Même question avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$*

## 11.2 Endomorphismes symétriques

### 11.2.1 Généralités

**Définition 11.2.1** *Soit $u \in L(E)$.*
*On dira que u est symétrique si et seulement si $\forall x, y \in E,\ < x, u(y) >=< u(x), y >$*
*On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques*

**Proposition 11.2.2** *$S(E)$ est un sev de $L(E)$*

Faites le.

**Exemple 11.2.3** *Les symétries orthogonales sont des endomorphismes symétriques car ...*

**Exemple 11.2.4** *Les projections orthogonales sont des endomorphismes symétriques*

**Exemple 11.2.5** *$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< A, B >= tr({}^tA.B)$*
*alors l'application $A \to {}^tA$ est symétrique.*

### 11.2.2 Matrices symétriques

**Définition 11.2.6** *(Rappel)*
*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$.*
*On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

**Proposition 11.2.7** *(Rappel)*
*$S_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

**Théorème 11.2.8** *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $u \in L(E)$, $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.*

$$u \in S(E) \iff A \in S_n(\mathbb{R})$$

car ...

### 11.2.3 Stabilité, orthogonalité

**Théorème 11.2.9** *Soit $u \in S(E)$ et F un sev de E.*
*$F$ est stable par $u \Longrightarrow F^\perp$ est stable par u, et $u_{|F} \in S(F)$ et $u_{F^\perp} \in S(F^\perp)$.*

Car ...

**Théorème 11.2.10** *Soit $u \in S(E)$.*
*$Im(u)$ et $Ker(u)$ sont supplémentaires orthogonaux, i.e. $E = Im(u) \oplus Ker(u)$ et $Im(u) \perp Ker(u)$*

Car ...

**Théorème 11.2.11** *Soit $u \in S(E)$.*
*Les sev propres de u sont en somme directe et sont orthogonaux deux à deux.*

Car ...

### 11.2.4 Le théorème spectral

**Théorème 11.2.12** *Soit $u \in S(E)$.*
*Son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.*

Car : soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $E$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. On sait que $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{C}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $u$ sur $\mathbb{C}$ et $X$ vecteur propre complexe associé à $\lambda$, donc $X \neq 0$
$AX = \lambda X \Longrightarrow {}^t\overline{X}AX = \lambda\, {}^t\overline{X}X \quad (1)$.
De plus $AX = \lambda X \Longrightarrow {}^tX\,{}^tA = \lambda\,{}^tX \Longrightarrow {}^tXA = \lambda\,{}^tX \Longrightarrow {}^t\overline{X}.\overline{A} = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X} \Longrightarrow {}^t\overline{X}AX = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}.X \quad (2)$
Ainsi (1) et (2) conduisent à $\lambda = \overline{\lambda}$ (car ${}^t\overline{X}.X = \sum |x_k|^2 \neq 0$ car $X \neq 0$). Donc $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme caractéristique de $A$ a toutes ses racines réelles, il est donc scindé sur $\mathbb{R}$.

**Théorème 11.2.13** *Soit $u \in S(E)$.*
*Alors il existe une base orthonormale diagonalisant $u$, i.e. $E$ est somme directe orthogonale des sev propres de $u$, ou encore, il existe une base orthonormée de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$*

car : se fait par récurrence sur $dim(E)$.
...

**Conséquence 11.2.14** *Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D$ diagonale tq $A = PD\,{}^tP$ (car $P \in \mathcal{O}(n) \Longrightarrow P^{-1} = {}^tP$).*
*Donc,*

***Théorème 11.2.15 Le théorème spectral :***
*Toute matrice symétrique **réelle** est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ au moyen d'une matrice de passage orthogonale, i.e.*

$$\forall A \in S_n(\mathbb{R}),\ \exists D \text{ diagonale},\ \exists P \in \mathcal{O}(n),\ \text{tq } D = P^{-1}AP = {}^tPAP$$

**Remarque 11.2.16** *Une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas nécessairement diagonalisable : prendre par exemple $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ et montrer que $A$ n'est pas diagonalisable.*

**Exemple 11.2.17** *Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. $A$ est symétrique réelle, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La diagonaliser en donnant une matrice de passage orthogonale permettant de la diagonaliser.*