# Chapitre 14

# Familles sommables de nombres complexes

## 14.1 Dénombrabilité

### 14.1.1 Ensembles dénombrables

**Définition 14.1.1** *Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.*

**Exemple 14.1.2** *$\mathbb{Z}$ est dénombrable.*

*En effet considérons* $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to \mathbb{Z} \\ n & \to \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$*. Montrer que $f$ est bijective.*

**Théorème 14.1.3** *Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable*

Car : soit $E$ une partie infinie de $\mathbb{N}$. $E$ possède un plus petit élément. On le note $f(0)$. Puis $E \setminus \{f(0)\}$ possède un plus petit élément qu'on note $f(1)$. Puis, par récurrence, $E \setminus \{f(0), f(1), ..., f(n-1)\}$ possède un plus petit élément qu'on note $f(n)$. On a ainsi construit une fonction $f : \mathbb{N} \to E$ strictement croissante car $f(n+1) \geqslant f(n) + 1$, donc $f$ est injective.
Montrons que $f$ est surjective. Soit $q \in E$.
$f$ croît strictement et est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = +\infty$. D'où, $\exists p \in \mathbb{N},\ f(p) \leqslant q < f(p+1)$. Or $f(p+1)$ est le minimum de $E \setminus \{f(0, ..., f(p)\}$, et $q \in E$ donc $q = f(p)$. $f$ est donc surjective donc bijective de $\mathbb{N}$ sur $E$, et donc $E$ est dénombrable.

**Corollaire 14.1.4** *Un ensemble est fini ou dénombrable (on dit aussi "au plus dénombrable") si et seulement si il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.*

car ...

### 14.1.2 Produit cartésien d'ensembles dénombrables

**Théorème 14.1.5** $\mathbb{N}^2$ *est dénombrable.*

car ...

**Théorème 14.1.6** *Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Par récurrence : Pour $n = 2$, Soient $E$ et $F$ deux ensembles dénombrables. Soit $f : E \to \mathbb{N}$ et $g : F \to \mathbb{N}$ bijectives. Alors l'application $(f, g) : E \times F \to \mathbb{N}^2$ est bijective. Or $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, donc il existe une application $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ bijective. D'où, $\varphi \circ (f, g)$ est une application bijective de $E \times F$ dans $\mathbb{N}$, et donc, $E \times F$ est dénombrable.
Puis, $E_1 \times E_2 \times ... \times E_{p+1} = (E_1 \times ... \times E_p) \times E_{p+1}$ qui permet de terminer la récurrence.

**Conséquence 14.1.7** $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^p$ *où* $p \in \mathbb{N}^*$ *sont dénombrables.*

### 14.1.3 Réunion d'ensembles dénombrables

**Théorème 14.1.8** *Une réunion finie d'ensembles dénombrables est dénombrable.*
*Si $I$ est un ensemble dénombrable, et si $\forall i \in I$, $E_i$ est un ensemble dénombrable, alors $\bigcup\limits_{i \in I} E_i$ est dénombrable.*
*On résume ceci en disant qu'une réunion au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

car ...

**Conséquence 14.1.9** *Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.*

**Conséquence 14.1.10** $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

En effet, $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{N}^*} \left\{ \dfrac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \right\}$. Notons $E_q = \left\{ \dfrac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \right\}$. Chacun de ces $E_q$ est en bijection avec $\mathbb{Z}$ qui est dénombrable. Donc les $E_q$ sont dénombrables, et donc $\mathbb{Q}$ est réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, donc est dénombrable.

**Exercice 14.1.11** *Le but est de montrer que l'ensemble $P$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*
*1. Notons $P_n$ l'ensemble des parties de $[\![0, n-1]\!]$. Quel est le cardinal de $P_n$ ?*
*2. Décrire $P$ à l'aide des $P_n$ et conclure.*

### 14.1.4 Ensemble des réels

**Théorème 14.1.12** $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

démonstration non exigible.

## 14.2 Familles sommables de réels positifs

Sauf mention du contraire, $I$ est un ensemble dénombrable.

**Définition 14.2.1** *Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels* ***positifs*** *avec $I$ ensemble dénombrable.*
*On dira que cette famille est sommable si et seulement si $\left\{ \sum\limits_{i \in F} u_i /\ F \text{ partie finie de } I \right\}$ est un ensemble majoré.*
*Dans ce cas, la borne sup dans $\mathbb{R}_+$ de cet ensemble est appelée "somme de la famille". Elle est*

*notée* $\sum_{i\in I} u_i$.
*Si la famille n'est pas sommable, alors on dira que* $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

**Exemple 14.2.2** *Montrons que la famille* $\left(\frac{1}{q^2}\right)_{q\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty]}$ *n'est pas sommable. Considérons* $E = \mathbb{Q}\cap[1,2]$. *$E$ est-il fini ? dénombrable ?*
*Soit* $n\in\mathbb{N}$. *Montrer qu'il existe une partie finie* $F_n$ *de* $E$ *telle que* $\sum_{q\in F_n} \frac{1}{q^2} \geqslant \frac{n}{4}$
*Conclure*

**Proposition 14.2.3** *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille sommable de réels positifs.*
*Soit* $J\subset I$. *Alors la famille* $(u_i)_{i\in J}$ *est sommable et* $\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

car $\left\{\sum_{i\in F} u_i / \ F \text{ partie finie de } J\right\} \subset \left\{\sum_{i\in F} u_i / \ F \text{ partie finie de } I\right\}$, et donc $\left\{\sum_{i\in F} u_i / \ F \text{ partie finie de } J\right\}$ est majoré.
De plus tout majorant de $\left\{\sum_{i\in F} u_i / \ F \text{ partie finie de } I\right\}$ majore $\left\{\sum_{i\in F} u_i / \ F \text{ partie finie de } J\right\}$,
ce qui prouve l'inégalité demandée.

**Proposition 14.2.4** *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *et* $(v_i)_{i\in I}$ *deux familles de réels positifs tels que* $\forall i,\ u_i \leqslant v_i$.
- *Si* $(v_i)_{i\in I}$ *est sommable alors* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable et* $0 \leqslant \sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$
- *Si* $(u_i)_{i\in I}$ *n'est pas sommable, alors* $(v_i)_{i\in I}$ *n'est pas sommable.*

car ...

**Théorème 14.2.5** ***Théorème de sommation par paquets***
*Soit* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une partition de* $I$.
*Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de réels positifs.*

$$\text{La famille } (u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ (u_i)_{i\in I_n} \text{ est sommable} \\ \text{et} \\ \text{la série } \sum_n \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) \text{ converge} \end{cases}$$

*et dans ce cas* $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$

Démonstration hors programme.

**Exemple 14.2.6** *Montrons que la famille* $\left(\frac{1}{(m+n)^3}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ *est sommable.*
*Pour* $p\in\mathbb{N}^*$, *notons* $I_p = \{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2} / m+n=p\}$.
*Vérifier que la famille* $(I_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *est une partition de* $\mathbb{N}^{*2}$.
*Conclure en appliquant le théorème de sommation par paquets.*

**Théorème 14.2.7** .
$$\left.\begin{array}{r}(u_i)_{i\in I} \textit{ famille sommable de réels positifs}\\ (v_i)_{i\in I} \textit{ famille sommable de réels positifs}\end{array}\right\} \Longrightarrow (u_i+v_i)_{i\in I} \textit{ est sommable}$$
*et alors* $\displaystyle\sum_{i\in I}(u_i+v_i)=\sum_{i\in I}u_i+\sum_{ß\in I}v_i$

car ...

**Théorème 14.2.8** .
$$\left.\begin{array}{r}(u_i)_{i\in I} \textit{ famille sommable de réels positifs}\\ \alpha\geqslant 0\end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha u_i)_{i\in I} \textit{ est sommable}$$
*et alors* $\displaystyle\sum_{i\in I}(\alpha u_i)=\alpha\sum_{i\in I}u_i$

car ...

## 14.3 Familles sommables de réels ou complexes

### 14.3.1 Généralités

**Définition 14.3.1** *Soit $I$ un ensemble dénombrable.*
*On dira que la famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable (on se ramène au paragraphe précedent)*

**Définition 14.3.2** .
• *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels.*
*Notons $I_+=\{i\in I/\ u_i\geqslant 0\}$ et $I_-=\{i\in I/\ u_i<0\}$.*
*On appelle somme de la famille le réel* $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I_+}|u_i|-\sum_{i\in I_-}|u_i|$
• *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes.*
*On appelle somme de la famille le complexe* $\displaystyle\sum_{k\in I}u_k=\sum_{k\in I}Re(u_k)+i\sum_{k\in I}Im(u_k)$

Ces définitions ont bien un sens car :
1) Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels, alors la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable et donc les familles $(|u_i|)_{i\in I_+}$ et $(|u_i|)_{i\in I_-}$ sont sommables (voir 14.2.3)
2) Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de complexes, alors la famille $(|u_k|)_{k\in I}$ est sommable. Or $|Re(u_k)|\leqslant|u_k|$ et $|Im(u_k)|\leqslant|u_k|$, donc les familles $(Re(u_k))_{k\in I}$ et $(Im(u_k))_{k\in I}$ sont sommables.

**Conséquence 14.3.3** *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels. Alors pour tout $J\subset I$, $(u_i)_{i\in J}$ est sommable sur $J$*

car ...

### 14.3.2 Linéarité de la somme de familles sommables

**Théorème 14.3.4** *Soient $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in I}$ deux familles sommables de réels ou complexes, et soit $\alpha$ et $\beta$ deux scalaires (réels ou complexes). Alors la famille $(\alpha u_k+\beta v_k)_{k\in I}$ est sommable et* $\displaystyle\sum_{k\in I}(\alpha u_k+\beta v_k)=\alpha\sum_{k\in I}u_k+\beta\sum_{k\in I}v_k$

car ...

**Conséquence 14.3.5** *L'ensemble des familles sommables sur $I$ est un espace vectoriel, et l'application $(u_k)_{k\in I}\to\displaystyle\sum_{k\in I}u_k$ est linéaire.*

### 14.3.3 Lien entre familles sommables et séries

**Lemme 14.3.6** *$I = \mathbb{N}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels* ***positifs****.*
*La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable $\iff$ la série $\sum_n u_n$ converge,*

*et alors* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$

car ...

**Théorème 14.3.7** *$I = \mathbb{N}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels ou complexes.*
*La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable $\iff$ la série $\sum_n u_n$ converge absolument,*

*et alors* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$

car ...

### 14.3.4 Permutation des termes d'une série

**Théorème 14.3.8** *Soit $\sum u_n$ une série de complexes absolument convergente, et soit $\sigma$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Alors $\sum_n u_{\sigma(n)}$ converge absolument et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$

Démonstration non exigible.

### 14.3.5 Théorème de sommation par paquets

**Théorème 14.3.9** ***Théorème de sommation par paquets***
*Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de $I$.*
*Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes.*

$$\text{La famille } (u_i)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ (u_i)_{i\in I_n} \text{ est sommable} \\ \text{et} \\ \text{la série } \displaystyle\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) \text{ converge} \end{cases}$$

*et dans ce cas* $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$

Montrons l'équivalence :
$(u_i)_{i\in I}$ est sommable $\iff$ $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable. On applique le théorème 14.2.5

$$(|u_i|)_{i\in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ (|u_i|)_{i\in I_n} \text{ est sommable} \\ \text{et} \\ \text{la série } \displaystyle\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) \text{ converge} \end{cases} \iff \begin{cases} \forall n\in\mathbb{N},\ (u_i)_{i\in I_n} \text{ est sommable} \\ \text{et} \\ \text{la série } \displaystyle\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) \text{ converge} \end{cases}$$

La démonstration de l'égalité est hors programme.

**Remarque 14.3.10** *ATTENTION : la famille peut ne pas être sommable avec, cependant la série $\displaystyle\sum_n \sum_{i\in I_n} u_i$ qui converge*

par exemple $\forall n,\ u_n = (-1)^n$ et $I_n = \{2n, 2n+1\}$.
La famille $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}$ et $\forall n,\ \sum_{i\in I_n} u_i = 0$ donc la série $\sum_n \sum_{i\in I_n} u_i$ converge.
Pourtant la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable (sa série ne converge pas absolument)

**Exemple 14.3.11** *Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Montrons que la famille $(q^{|p|})_{p\in\mathbb{Z}}$ est sommable et donner sa somme.*
*On utilisera une sommation par paquets en écrivant $\mathbb{Z} = {\mathbb{Z}_-}^* \cup \mathbb{N}$.*

## 14.4 Séries doubles

### 14.4.1 Théorème de Fubini : interversion des sommations

**Théorème 14.4.1** *Cas des réels positifs.*
*Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.*

$$\text{Cette famille est sommable} \iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{la série } \sum_m a_{m,n} \text{ converge} \\ \text{la série } \sum_n \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) \text{ converge} \end{cases}.$$

*Dans ces conditions*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$$

car ...

**Exemple 14.4.2** *Calculons après avoir justifié son existence : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.*

*On introduit la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ définie par $u_{n,k} = 0$ si $k < n$ et $u_{n,k} = \dfrac{1}{k!}$ si $k \geqslant n$.*
*Montrons que la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et évaluer sa somme. Conclure.*

**Théorème 14.4.3** *Cas général.*
*Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou complexes.*

$$\begin{aligned} \text{Cette famille est sommable} \quad &\iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{la série } \sum_m |a_{m,n}| \text{ converge} \\ \text{la série } \sum_n \left( \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}| \right) \text{ converge} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall m \in \mathbb{N}, \quad \text{la série } \sum_n |a_{m,n}| \text{ converge} \\ \text{la série } \sum_m \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{m,n}| \right) \text{ converge} \end{cases} \end{aligned}.$$

*Dans ces conditions*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \right)$$

Car ...

**Corollaire 14.4.4** ***: à savoir redémontrer***
*Si $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ sont deux familles sommables alors la famille $(a_pb_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et*

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_pb_q = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q\right)$$

En effet, $\sum_p a_p$ et $\sum_q b_q$ CVA. $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_p |a_p|$ converge $\Longrightarrow \sum_p |a_pb_q|$ converge et $\sum_{p=0}^{+\infty} |a_pb_q| = |b_q|\sum_{p=0}^{+\infty}|a_p|$ donc $\sum_q \left(\sum_{p=0}^{+\infty}|a_pb_q|\right)$ converge.
alors, le théorème de Fubini prouve que la famille $(a_pb_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable sur $\mathbb{N}^2$ et $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_pb_q = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} a_pb_q = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(a_p\sum_{q=0}^{+\infty} b_q\right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q\right)$ ce qui achève la démonstration.

### 14.4.2 Produit de Cauchy de 2 séries absolument convergentes

**Définition 14.4.5** *Rappel*
*Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de complexes. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{p=0}^{n} u_pv_{n-p} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2/p+q=n} u_pv_q$*

**Exemple 14.4.6** *Déterminer la série produit de Cauchy de la série $\sum x^n$ par elle même.*

**Théorème 14.4.7** *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de complexes absolument convergentes. Alors leur série $\sum w_n$ produit de Cauchy converge absolument et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} u_pv_{n-p}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} v_m\right)$$

car ...

**Corollaire 14.4.8** *Soit $z \in \mathbb{C}$.*
*La série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ converge absolument. On note $e^z$ sa somme.*
*Alors*

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$$

En effet ...

**Corollaire 14.4.9** *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
*La série de terme général $\frac{A^n}{n!}$ converge absolument. On note $exp(A)$ sa somme.*
*et* ***si** $A$ **et** $B$ **commutent**,*

$$exp(A+B) = exp(A)\,exp(B) = exp(B)\,exp(A)$$

car ...