

Chapitre 7

Fonctions vectorielles

Dans tout ce chapitre I est un intervalle de $\mathbb{R}$, F est un evn sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, et les fonctions sont des fonctions de I dans F .

7.1 Dérivation

7.1.1 Dérivée en un point

Définition 7.1.1 — Soit $a \in I$. On dira que f est dérivable en a si et seulement si la fonction $t \rightarrow \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ a une limite dans F quand t tend vers a (par valeurs différentes).

Cette limite, si elle existe est appelée nombre dérivé de f en a , noté $f'(a)$.

si f est dérivable en a , alors $f'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$

— Lorsque $a \in \overset{\circ}{I}$, on dira que f est dérivable à droite (resp à gauche) en a si et seulement si $t \rightarrow \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ a une limite dans F quand t tend vers a par valeurs supérieures (resp par valeurs inférieures). Cette limite, si elle existe est appelée dérivée de f à droite (resp à gauche) en a et se note $f'_d(a)$ (resp $f'_g(a)$) .

Si f est dérivable à droite en a , alors $f'_d(a) = \lim_{t \rightarrow a, t > a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$

Remarque 7.1.2 Bien comprendre que dans $\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$, le numérateur $f(t) - f(a)$ est un vecteur, alors que $t - a$ est un réel. Il s'agit d'une multiplication scalaire : $\frac{1}{t - a} \cdot (f(t) - f(a))$

Remarque 7.1.3 On ne parle pas de dérivée à droite (ou à gauche) lorsque a est borne de I .

Remarque 7.1.4 Lorsque $a \in \overset{\circ}{I}$, f dérivable en $a \iff \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$

Proposition 7.1.5 .

$$\begin{aligned}
f \text{ dérivable en } a \text{ de dérivée } \ell &\iff \forall t \in I, f(t) = f(a) + (t-a)\ell + (t-a)\varepsilon(t-a) \text{ et } \lim_{t \rightarrow a} \varepsilon = 0 \text{ } (\varepsilon : J \rightarrow F) \\
&\iff \forall h \text{ tq } a+h \in I, f(a+h) = f(a) + h\ell + h\varepsilon(h) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \\
&\iff \forall h \text{ tq } a+h \in I, f(a+h) = f(a) + h\ell + o_0(h)
\end{aligned}$$

(ici $\varepsilon : J \rightarrow F$ où J est l'intervalle I translaté de $-a$.)

car ...

Remarque 7.1.6 Si f vérifie $\forall t \in I, f(t) = f(a) + (t-a)\ell + (t-a)\varepsilon(t-a)$ et $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon = 0$, on dit que f est différentiable en a .

Ainsi, pour f définie sur un intervalle I , f dérivable en $a \iff f$ différentiable en a .

Conséquence 7.1.7 f dérivable en $a \implies f$ continue en a .

Remarque 7.1.8 Donner un exemple montrant que la réciproque est fausse, i.e. une fonction continue en un point mais non dérivable en ce point.

Exemple 7.1.9 Montrer que la fonction $t \rightarrow t \sin(1/t)$ est prolongeable par continuité en 0, mais que la fonction ainsi prolongée n'est pas dérivable en 0, et n'a ni dérivée à droite en 0 ni dérivée à gauche en 0.

Interprétation géométrique : Supposons f continue au voisinage de a et dérivable en a . Pour $t \neq a$, si $f(t) \neq f(a)$, le vecteur $\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ est un vecteur directeur de la droite D_t passant par les points $f(t)$ et $f(a)$.

Si $f'(a) \neq 0$, alors la droite $\Delta_a = f(a) + \text{Vect}(f'(a))$ est position limite des droites D_t quand t tend vers a . On dit que Δ_a est la tangente à l'arc paramétré par $t \rightarrow f(t)$ au point de paramètre a .

Théorème 7.1.10 Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F . On peut écrire $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$ où les f_k sont les fonctions coordonnées de f , $f_k : I \rightarrow \mathbb{K}$.

f dérivable en $a \iff$ les f_k sont dérivables en a , et alors $f'(a) = \sum_{k=1}^n f'_k(a) e_k$

car ...

Exemple 7.1.11 — Une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dérivable en a si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

— Soit $f : t \rightarrow \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d : I \rightarrow \mathbb{K}$. f est dérivable en $t_0 \iff a, b, c, d$ sont dérivables en t_0 et alors $f'(t_0) = \begin{pmatrix} a'(t_0) & b'(t_0) \\ c'(t_0) & d'(t_0) \end{pmatrix}$

7.1.2 Fonction dérivée

Définition 7.1.12 Si f est dérivable en tout point de I , on définit sur I sa fonction dérivée par $t \mapsto f'(t)$

Par récurrence on peut définir, si elles existent, les dérivées successives de $f : f', f^{(2)}, f^{(3)}$ etc.

Notation 7.1.13 On notera $\mathcal{D}(I, F)$ l'ensemble des fonction dérivables sur I , et $\mathcal{D}^k(I, F)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I .

Proposition 7.1.14 Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F . On peut écrire $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$ où les f_k sont les fonctions coordonnées de f , $f_k : I \rightarrow \mathbb{K}$.

f dérivable sur $I \iff$ les f_k sont dérivables sur I et alors $f' = \sum_{k=1}^n f'_k e_k$

C'est le théorème 7.1.10

Théorème 7.1.15 Soit $f : I \rightarrow F$ dérivable sur I .

$$f \text{ est constante sur } I \iff f' = 0 \text{ sur } I \quad \text{i.e.}$$

$$\exists C \in F, \forall x \in I, f(x) = C \iff f' = 0$$

Car ...

Insistons sur le fait que ce théorème est vrai si I est un intervalle

Exemple 7.1.16 Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$. f n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$ mais pourtant $\forall t \in \mathbb{R}^*, f'(t) = 0$.

7.1.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 7.1.17 Linéarité

f, g dérivables en a . $\forall \lambda, \mu \in K$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$

En d'autres termes, l'ensemble $D_a(I, F)$ des fonctions dérivables en a est un espace vectoriel, et

l'application $\begin{cases} D_a(I, F) & \rightarrow \mathcal{F}(I, F) \\ f & \rightarrow f'(a) \end{cases}$ est linéaire.

Car ... (revenir à la différentiabilité)

Conséquence 7.1.18 $\mathcal{D}(I, F)$ est un espace vectoriel et l'application $\begin{cases} \mathcal{D}(I, F) & \rightarrow \mathcal{F}(I, F) \\ f & \rightarrow f' \end{cases}$ est linéaire.

Théorème 7.1.19 Dérivation du produit d'une fonction vectorielle par une fonction numérique

Soit $f : I \rightarrow F$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$. Alors la fonction $\varphi f : I \rightarrow F$ est dérivable en a et $(\varphi f)'(a) = \varphi'(a)f(a) + \varphi(a)f'(a)$

Revenir à la différentiabilité.

Théorème 7.1.20 Soit $f : I \rightarrow F$, $u \in \mathcal{L}(F, G)$, $a \in I$.
 f dérivable en $a \implies u \circ f$ dérivable en a et $(u \circ f)'(a) = u \circ f'(a)$.

Car ... (encore la différentiabilité)

Exemple 7.1.21 $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \rightarrow (t^2, t^3) \end{cases}$ et $u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \rightarrow (x + y, 2x - 4y) \end{cases}$. Exprimer $u \circ f$ et vérifier que $(u \circ f)'(1) = u \circ f'(1)$.

Théorème 7.1.22 Composition d'une fonction numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec une fonction vectorielle.

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$.

Soit $f : J \rightarrow F$ dérivable en $\varphi(a)$, avec J intervalle et $\varphi(I) \subset J$.

Alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et $(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)f'(\varphi(a))$

Remarquons que dans $\varphi'(a)f'(\varphi(a))$, $\varphi'(a)$ est un réel et $f'(\varphi(a))$ est un vecteur de F , cette multiplication est donc une multiplication scalaire.

Démonstration : ...

Théorème 7.1.23 Dérivation d'une forme bilinéaire de fonctions.

Soit $\Phi : F \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire (F de dimension finie, donc Φ est continue)

Soit $f, g : I \rightarrow F$ dérivables en $a \in I$.

alors $H : \begin{cases} I & \rightarrow G \\ t & \rightarrow \Phi(f(t), g(t)) \end{cases}$ est dérivable en a et $H'(a) = \Phi(f'(a), g(a)) + \Phi(f(a), g'(a))$.

Car ...

Remarque 7.1.24 Plaçons nous dans le cas où $F = \mathbb{R}$. soit $\Phi : (x, y) \rightarrow xy$. Φ est bilinéaire. Alors pour f et g fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en a , on retrouve le théorème sur la dérivée de fg en a . Le vérifier.

Application 7.1.25 Si F est un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (bilinéaire).

Alors pour f et g dérivables en a , l'application $t \rightarrow \langle f(t), g(t) \rangle$ est dérivable en a de dérivée en $a : \langle f'(a), g(a) \rangle + \langle f(a), g'(a) \rangle$.

Pour f et g dérivables sur I , $\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$

Conséquence 7.1.26 Soit F est un espace préhilbertien et $f : I \rightarrow F$ dérivable sur I , alors l'application $\|f\|^2$ est dérivable sur I et $(\|f\|^2)' = 2 \langle f, f' \rangle$.

Par exemple, soit $e : I \rightarrow F$ dérivable sur I et telle que $\forall t \in I$, $\|e(t)\| = 1$. Montrer que $\forall t \in I$, $e(t) \perp e'(t)$.

Théorème 7.1.27 Généralisation aux applications n -linéaires.

Soit $\Phi : F^n \rightarrow G$ une application n -linéaire.

Soit $(f_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ tq $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_k : I \rightarrow F$ est dérivable en a ($a \in I$).

Alors $H = \Phi(f_1, \dots, f_n)$ est dérivable en a et

$$H'(a) = \Phi(f'_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a)) + \Phi(f_1(a), f'_2(a), \dots, f_n(a)) + \dots + \Phi(f_1(a), \dots, f_{n-1}(a), f'_n(a))$$

Car ...

Conséquence 7.1.28 Dérivation d'un déterminant :

Soit $A : \begin{cases} I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \rightarrow (a_{i,j}(t))_{i,j \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \end{cases}$ avec $\forall i, j, a_{i,j} : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

Alors $\det(A) : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow \det(A(t)) \end{cases}$ est dérivable sur I et $\forall t \in I, \det(A)'(t) = \sum_{k=1}^n \det(A_k(t))$ où A_k est la fonction matricielle constituée des colonnes $[C_1, \dots, C_{k-1}, C'_k, C_{k+1}, \dots, C_n]$ où C_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de A .

Par exemple la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow \det \begin{pmatrix} t^2 & t^3 \\ 5t & 4t - t^2 \end{pmatrix} \end{cases}$ a pour fonction dérivée :

$t \rightarrow \begin{vmatrix} 2t & t^3 \\ 5 & 4t - t^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t^2 & 3t^2 \\ 5t & 4 - 2t \end{vmatrix}$ ce qu'on peut aisément vérifier en explicitant l'expression de f

7.1.3.1 Cas des fonctions numériques : 2 rappels

Théorème 7.1.29 • Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}, a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$. On suppose f dérivable en a .

Alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$

• et donc si f est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I ,

alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

Pour la preuve, voir le cours de Mpsi.

Théorème 7.1.30 Soit $f : I \rightarrow J = f(I)$ continue, strictement monotone (donc bijective de I sur J).

Soit $a \in I$ et f dérivable en a .

Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a) \iff f'(a) \neq 0$ et alors

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \text{ i.e. } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$$

7.1.4 Fonctions de classe C^k

Définition 7.1.31 Soit $f : I \rightarrow F$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

• On dira que f est de classe C^k sur I si et seulement si f admet une dérivée d'ordre k en tout point de I et si $f^{(k)} : I \rightarrow F$ est continue sur I .

• On note $C^k(I, F)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I à valeurs dans F .

• On dira qu'une fonction est de classe C^∞ sur I si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}, f$ est de classe C^k .

• On note $C^\infty(I, F)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I à valeurs dans F .

Remarque 7.1.32 L'existence de $f^{(k)}$ sous-entend celle de $f', f'', \dots, f^{(k-1)}$, qui sont toutes continues sur I car dérivables sur I .

Remarque 7.1.33 Pour montrer que f est C^∞ sur I il suffit de montrer que f est dérivable à tout ordre sur I .

Conséquence 7.1.34 .

$$C^\infty(I, F) \subset \dots \subset C^{k+1}(I, F) \subset C^k(I, F) \subset \dots \subset C^1(I, F) \subset C^0(I, F) = C(I, F)$$

7.1.4.1 Algèbre $C^n(I, \mathbb{K})$ **Théorème 7.1.35 Formule de Leibniz**

$$\varphi \in C^n(I, \mathbb{K}), f \in C^n(I, F) \implies \varphi f \in C^n(I, F) \text{ et}$$

$$(\varphi f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^{(k)} f^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^{(n-k)} f^{(k)}$$

Il faut être capable de redémontrer ce théorème (par récurrence).

Conséquence 7.1.36 $C^n(I, \mathbb{K})$ est une algèbre.

car ...

Exemple 7.1.37 Donner la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $t \rightarrow (t^3 - 7t^2)e^{-2t}$

7.1.4.2 Composition de fonctions de classe C^n

Théorème 7.1.38 I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\varphi : I \rightarrow J$ de classe C^n sur I et soit $f : J \rightarrow F$ de classe C^n sur J . Alors $f \circ \varphi$ est de classe C^n sur I .

Là encore, par récurrence : ...

Remarque 7.1.39 Il n'y a pas de formule simple donnant l'expression de $(f \circ \varphi)^{(n)}$ en fonction des dérivées de f et de φ .

Théorème 7.1.40 La fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x & \rightarrow \frac{1}{x} \end{cases}$ est de classe C^∞ et

$$\forall x \neq 0, \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \quad (\text{notation abusive})$$

7.2 Intégration sur un segment

Dans toute la suite E un evn de dimension finie.

7.2.1 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 7.2.1 — Soit I un segment et $f \in \mathcal{F}(I, E)$. On dira que f est continue par morceaux sur $I = [a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = (a_0 = a, a_1, \dots, a_p = b)$ avec $a_0 < a_1 < \dots < a_p$ telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \begin{cases} \text{la restriction de } f \text{ à }]a_k, a_{k+1}[\text{ est continue} \\ f \text{ a une limite à droite dans } E \text{ en } a_k \\ f \text{ a une limite à gauche dans } E \text{ en } a_{k+1} \end{cases}$$

— Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{F}(I, E)$. On dira que f est continue par morceaux sur I si et seulement si pour tout segment $J \subset I$, f est continue par morceaux sur J .

Notation 7.2.2 L'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans E se note $\mathcal{CM}(I, E)$.

Exemple 7.2.3 1. La fonction Partie Entière E est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \rightarrow \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ car ...

3. On considère la fonction $f : x \rightarrow x^2 E(1/x)$. Est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Est-elle continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$?

Remarque 7.2.4 — Si f est continue par morceaux sur un segment, alors elle a un nombre fini de points de discontinuité sur ce segment

— Si f est continue par morceaux sur un intervalle non borné, il est possible que f ait une infinité de points de discontinuité (voir la fonction Partie Entière)

7.2.2 Intégration

Définition-théorème 7.2.5 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$ avec $I = [a, b]$ et $a < b$; on note $(f_1, \dots, f_n)$ les fonctions coordonnées de f dans

$\mathcal{B}$, i.e. $\forall t \in I, f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)e_k$.

Alors $f \in \mathcal{CM}(I, E) \iff \forall k, f_k \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et le vecteur $\sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k \right) e_k$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ de E .

Ce vecteur se nomme intégrale sur $[a, b]$ de f et se note $\int_a^b f$ ou $\int_I f$ ou $\int_I f(t)dt$...

car ...

7.2.3 Propriétés

À partir des propriétés connues de l'intégrale d'une fonction définie sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$ on peut déduire les propriétés suivantes pour les fonctions du segment I à valeurs dans E :

Théorème 7.2.6 Linéarité Soit I un segment

L'application $\begin{cases} \mathcal{CM}(I, E) & \rightarrow E \\ f & \rightarrow \int_I f \end{cases}$ est linéaire, i.e.

$$\forall f, g \in \mathcal{CM}(I, E), \forall \alpha, \beta, \int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$$

Clair : on passe aux fonctions coordonnées.

Notation 7.2.7 Soit $a, b \in I$ Si $a > b$, $\int_a^b f$ désigne $-\int_b^a f$, et $\int_a^a f = 0$

Théorème 7.2.8 Chasles :

Avec ces notations, $\forall a, b, c \in I, \forall f \in \mathcal{CM}(I, E), \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$

Clair là aussi : on passe aux fonctions coordonnées.

Théorème 7.2.9 Sommes de Riemann.

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_p)$ une subdivision de $I = [a, b]$, de pas constant. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k)$$

Le vecteur $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$ est parfois noté $R_n^-(f)$

Le vecteur $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k)$ est parfois noté $R_n^+(f)$

Clair car on sait qu'une suite de E converge si et seulement si ses suites coordonnées convergent et ...

Théorème 7.2.10 Inégalité de la norme

Soit I un segment, $f \in \mathcal{CM}(I, E)$ et $\|\cdot\|$ une norme sur E . Alors, pour $a \leq b$, $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$

En effet ...

7.2.4 Dérivation : intégrale fonction de sa borne supérieure

Définition 7.2.11 Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}(I, E)$. On appelle primitive de f sur I toute fonction $F : I \rightarrow E$ qui est dérivable sur I et telle que $F' = f$.

Remarque 7.2.12 Une primitive de f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

Proposition 7.2.13 F et G primitives de f sur $I \implies \exists C \in E, F = C + G$

Car $(F - G)' = 0$ et on applique 7.1.15

Théorème 7.2.14 Soit $f : I \rightarrow E$ continue sur I et $a \in I$. Alors l'application $F : \begin{cases} I & \rightarrow E \\ x & \rightarrow \int_a^x f(t)dt \end{cases}$

est la primitive de f qui s'annule en a , et pour toute primitive G de f , $\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$.

Car ...

Conséquence 7.2.15 Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Conséquence 7.2.16 Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $a \in I$. Alors l'application $x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$.

Généralisation 7.2.17 Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $a \in I$. Soit $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle J avec $u(J) \subset I$.

Alors $G : x \rightarrow \int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et $\forall x \in J$, $G'(x) = u'(x) \times f(u(x))$

car (théorème de dérivation des fonctions composées) ...

Conséquence 7.2.18 Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$ et $a \in I$. alors $\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$

car ...

Exemple 7.2.19 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ t & \rightarrow \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{cases}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ exprimer $\int_0^x f(t)dt$.

Exemple 7.2.20 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

On considère la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$. Justifier que g est bien définie, montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$, déterminer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$.

7.2.5 Intégration par partie et changement de variables

Théorème 7.2.21 IPP Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $u : I \rightarrow E$ avec φ et u de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Alors $\forall a, b \in I$, $\int_a^b \varphi'(t)u(t)dt = [\varphi(t)u(t)]_a^b - \int_a^b \varphi(t)u'(t)dt$.

Utilise le théorème 7.1.19 ...

Théorème 7.2.22 Changement de variables : Cas des fonctions continues

Soit $f \in \mathcal{C}(I, E)$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ avec $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \varphi(u) \varphi'(u)du$$

Car ...

Remarque 7.2.23 Dans la pratique, on pose $t = \varphi(u)$, d'où $dt = \varphi'(u)du$. Ne pas oublier de changer les bornes d'intégration !

Remarque 7.2.24 La changement de variable affine $t = a + (b - a)u$ permet de transformer une intégrale sur $[a, b]$ en une intégrale sur $[0, 1]$:

$$\int_a^b f(t)dt = \dots = (b - a) \int_0^1 f(a + (b - a)u)du$$

Exercice 7.2.25 Quel changement de variable affine simple permettrait de passer de $\int_a^b f(t)dt$ à l'intégrale d'une fonction sur $[-1, 1]$?

Théorème 7.2.26 *Changement de variables pour les fonctions continues par morceaux.*

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, E)$, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ et strictement monotone, telle que $\varphi(\alpha) \in I$ et $\varphi(\beta) \in I$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ \varphi(t) \varphi'(t)dt$$

L'hypothèse de monotonie stricte permet d'affirmer que $f \circ \varphi$ est continue par morceaux sur $[\alpha, \beta]$. Alors ...

Exemple 7.2.27 *Cas où f est T -périodique. Alors $\int_{a+kT}^{b+kT} f = \int_a^b f$*

car ...

Exemple 7.2.28 *Cas où f est paire sur I centré en 0. Alors $\forall a \in I$, $\int_{-a}^0 f = \int_0^a f$.*

Cas où f est impaire sur I centré en 0. Alors $\forall a \in I$, $\int_{-a}^a f = 0$

car ...

7.3 Taylor

7.3.1 Rappel du théorème des accroissements finis (TAF) : cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

Théorème 7.3.1 *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors*

$$\exists c \in]a, b[, \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Voir la démonstration dans le cours de Mpsi.

Remarque 7.3.2 *Ce théorème n'est vrai que pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ il est faux comme le prouve l'exemple suivant :*

Soit : $\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \rightarrow e^{it} \end{cases}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = ie^{it}$, donc $|f'(t)| = |ie^{it}| = 1$ donc $\forall t$, $f'(t) \neq 0$, alors que $f(0) - f(2\pi) = 0$. La fonction f ne vérifie donc pas la conclusion du TAF tout en vérifiant les hypothèses sur $[0, 2\pi]$.

Remarque 7.3.3 *Rappelons que c'est ce théorème qui permet de prouver le théorème vu en première concernant les variations d'une fonction dérivable sur un intervalle I selon le signe de la dérivée.*

Rappeler ce théorème :

Théorème 7.3.4 *Extremums locaux.*

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I , et soit $a \in \overset{\circ}{I}$

— f admet un extremum en $a \implies f'(a) = 0$.

— $f'(a) = 0$ et f' change de signe en $a \implies f$ a un extremum local en a .

Car ...

Théorème 7.3.5 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ telles que $|f'| \leq g'$ sur $]a, b[$.

Alors $|f(b) - f(a)| \leq |g(b) - g(a)|$.

Car :

$$\text{1er cas } a \leq b. \text{ Alors } |f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)| dt \leq \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a)$$

Traitez le 2nd cas : $a > b$

7.3.2 Inégalité des accroissements finis : IAF

Théorème 7.3.6 Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ telle que $\exists M \geq 0, \forall t \in]a, b[, \|f'(t)\| \leq M$. Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M |b - a|$

Car ...

Conséquence 7.3.7 Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tq $\exists M > 0, \forall t \in I, \|f'(t)\| \leq M$. alors f est M -Lipschitzienne sur I

car ...

Remarque 7.3.8 Cette inégalité généralise aux fonctions à valeurs dans un ev de dimension finie le TAF qui n'est vrai que pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 7.3.9 Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ **par morceaux** sur $[a, b]$ telle que $\exists M \geq 0, \forall t \in [a, b], \|f'(t)\| \leq M$. Alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M |b - a|$

i.e. IAF est encore vraie si f' est seulement continue par morceaux sur $[a, b]$

En effet ...

Théorème 7.3.10 Théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue sur $[a, b]$ sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

f' a une limite $\ell \in E$ en $b \implies f$ dérivable en b et $f'(b) = \ell = \lim_{x \rightarrow b} f'(x)$

Car ...

Corollaire 7.3.11 $f : I \rightarrow E$ et $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x_0} f' = \ell \implies f$ dérivable en x_0 , $f'(x_0) = \ell$ et f' continue en x_0 .

Exemple 7.3.12 Soit $f : x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Montrer que f est prolongeable par continuité, et que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 7.3.13 Il existe des fonctions $f : I \rightarrow E$ continue sur I et dérivable sur I et telles que f' n'a pas de limite en x_0 , c'est à dire des fonctions dérivables sur I mais dont la dérivée n'est pas continue sur I , comme en témoigne l'exemple suivant :

Exemple 7.3.14 $f : x \rightarrow \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$

Montrer que f est dérivable en 0, et que f' n'a pas de limite en 0

Corollaire 7.3.15 f de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$ telle que f et ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à k possèdent toutes des limites en b dans E .

Alors f est k fois dérivable en b et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$.

7.3.3 Formules de Taylor

Théorème 7.3.16 Taylor avec reste intégral à l'ordre n .

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Par récurrence. À l'ordre 0 il s'agit du théorème 7.2.18. Puis intégration par partie "judicieuse".

Remarque 7.3.17 Le terme $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ est appelé reste d'ordre n dans la formule et se note souvent R_n .

Il mesure l'erreur commise lorsqu'on remplace $f(b)$ par $\sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

ATTENTION : Ce reste peut être grand

Exemple 7.3.18 On va montrer que $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

1. Pour $x > 0$, appliquer (après justification) la formule de Taylor au rang 2 puis 3 à la fonction $f : t \rightarrow \ln(1+t)$ sur $[0, x]$
2. En étudiant, pour $x > 0$ le signe de $R_2(x)$ et de $R_3(x)$, conclure.

Exemple 7.3.19 Appliquons la formule de Taylor à la fonction $\exp$ à l'ordre n sur $[0, x]$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

$$\text{Pour } x \text{ fixé, } \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \max(1, e^x) \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right| = \max(1, e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par comparaison des suites géométriques et factorielles, on déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| = 0.$$

Ceci nous permet de conclure que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Conséquence 7.3.20 Inégalité de Taylor Lagrange

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ telle que $\exists M, \forall t \in [a, b], \|f^{(n+1)}(t)\| \leq M$. Alors

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Car ...

Remarque 7.3.21 Pour $n = 0$ on retrouve l'inégalité des accroissements finis.

Théorème 7.3.22 Taylor Young : propriété locale

Soit $f : I \rightarrow E$, de classe C^n sur I , et soit $a \in I$, alors f a un développement limité d'ordre n au voisinage de a , i.e..

il existe une fonction ε telle que $f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + h^n \varepsilon(h)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Car ...

Remarque 7.3.23 C'est un théorème local : il n'a de sens que pour h voisin de 0, la seule chose qu'on connaît sur cette fonction ε est qu'elle a pour limite 0 en 0.

Théorème 7.3.24 Intégration d'un Développement limité

Soit $f : I \rightarrow E$ continue sur I , et soit $x_0 \in I$. On suppose que f admet un Développement Limité d'ordre n au voisinage de x_0 (noté $DL_n(x_0)$) :

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$ et $\lim_0 \varepsilon = 0$, avec $a_0, \dots, a_n \in E$ et ε fonction à valeurs dans E .

Alors toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(x_0)$:

$F(x) = F(x_0) + a_0(x-x_0) + a_1 \frac{(x-x_0)^2}{2} + \dots + a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + (x-x_0)^{n+1} \varepsilon_2(x-x_0)$ et $\lim_0 \varepsilon_2 = 0$.

Car ...

Exemple 7.3.25 Écrire le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de la fonction Arctan .

7.4 Arcs paramétrés de classe C^1

7.4.1 Généralités

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et

E un espace vectoriel de dimension 2 ou 3 sur $\mathbb{R}$. E est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ si $n = 2$, ou $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si $n = 3$.

Définition 7.4.1 • On appelle arc paramétré de classe C^k ($k \geq 1$) sur E toute application de classe C^k définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E .

La fonction est souvent notée $M : \begin{cases} I \rightarrow E \\ t \rightarrow M(t) \end{cases}$

- Le support (ou trajectoire) de l'arc paramétré est l'ensemble $M(I) = \{M(t) / t \in I\}$
- Un arc est dit fermé lorsque I est un segment $I = [a, b]$ et $M(a) = M(b)$.

Définition 7.4.2 Soit $M : I \rightarrow E$ un arc paramétré de classe C^1 sur I et soit $t_0 \in I$

On dira que le point $M(t_0)$ est régulier si et seulement si $\overrightarrow{M'(t_0)} \neq \vec{0}$

On dira que le point $M(t_0)$ est stationnaire si et seulement si $\overrightarrow{M'(t_0)} = \vec{0}$

On dira que l'arc est régulier si tous ses points sont réguliers

7.4.2 Tangente en un point d'un arc régulier

Soit M un arc paramétré de classe C^k défini sur I ($k \geq 1$), et soit $t_0 \in I$.
On suppose qu'il existe un entier j tel que $1 \leq j \leq k$ et $\overrightarrow{M^{(j)}(t_0)} \neq \vec{0}$. On note p le plus petit de ces entiers.
Notons $M_h = M(t_0 + h)$.

$$\overrightarrow{M_0 M_h} = \frac{h^p}{p!} \overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} + h^p \varepsilon_1(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = \vec{0} \quad (\text{Taylor Young})$$

Donc, pour h tendant vers 0,

$$\left\| \overrightarrow{M_0 M_h} \right\| \sim \frac{|h^p|}{p!} \left\| \overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} \right\|$$

et donc pour h voisin de 0, $M_0 \neq M_h$.

Alors la droite (M_0, M_h) (droite "sécante") qui a pour vecteur directeur $\frac{p!}{h^p} \overrightarrow{M_0 M_h}$ a pour limite $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)}$

La droite $M_0 + \text{Vect} \left(\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} \right)$, position limite de la droite sécante $M_0 + \text{Vect} \left(\overrightarrow{M_0 M_h} \right)$ est appelée tangente à l'arc paramétré au point M_0 .

D'où la définition/propriété suivante

Définition 7.4.3 On considère un arc paramétré M de classe C^k . S'il existe un $t_0 \in I$ et si on note $p \in [[1, k]]$ le plus petit entier supérieur à 1 tel que tel que $\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} \neq \vec{0}$ (si un tel entier existe), alors la tangente à l'arc paramétré au point t_0 est la droite $M_0 + \text{Vect} \left(\overrightarrow{M^{(p)}(t_0)} \right)$.

C'est la position limite de la sécante $M_0 + \text{Vect} \left(\overrightarrow{M_0 M_h} \right)$ (où $M_h = M(t_0 + h)$) quand h tend vers 0.

Proposition 7.4.4 Si l'arc est régulier, alors la courbe admet en tout point t_0 une tangente de vecteur directeur $\overrightarrow{M'(t_0)}$

Dans le cas où E est de dimension 2, la tangente (T) au point régulier $M(t_0)$ a pour équation

$$M(x, y) \in (T) \iff \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Définition 7.4.5 Dans le cas où E est de dimension 2, on appelle normale à l'arc paramétré au point régulier t_0 , la droite affine passant par ce point et orthogonale à la tangente en ce point.