Chapitre 12

Integration sur un intervalle quelconque

12.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

12.1.1 Intégrale convergente ou divergente

Définition 12.1.1 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ converge si et seulement si la fonction $x \to \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.*
Dans ce cas $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ désigne alors la limite de la fonction $x \to \displaystyle\int_a^x f$ quand x tend vers $+\infty$.
Si la fonction $x \to \displaystyle\int_a^x f$ n'a pas de limite finie quand x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale de f sur $[a, +\infty[$ diverge, ce qui se note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ DV, mais il faut bien voir que dans ce cas l'écriture $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ n'a pas de sens mathématique ...

Exemple 12.1.2 *Étudier la convergence des intégrales suivantes :*
1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ 3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

12.1.2 Propriétés

Proposition 12.1.3 ***Linéarité***
Soient $f, g, \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ *CV*$\Longrightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} (\alpha f + \beta g)$ *CV et alors*
$$\int_a^{+\infty} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^{+\infty} f + \beta \int_a^{+\infty} g$$
car ...

Remarque 12.1.4 *Nous venons de prouver que* $\left\{ f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K}) / \int_a^{+\infty} f \ CV \right\}$ *est un espace vectoriel et l'application* $f \to \int_a^{+\infty} f$ *est linéaire sur cet espace.*

Proposition 12.1.5 *Soit* $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ *et* $b > a$.
$\int_a^{+\infty} f$ *converge* $\iff \int_b^{+\infty} f$ *converge*
et alors $\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$

Proposition 12.1.6 ***Positivité***
Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ *tq* $\int_a^{+\infty} f$ *converge*

- *f positive sur* $[a,+\infty[\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f \geqslant 0$
- *Si f est continue et positive sur* $[a,+\infty[$, $\int_a^{+\infty} f = 0 \Longrightarrow f = 0$ *sur* $[a,+\infty[$

Car ...

Proposition 12.1.7 ***Comparaison (cas des fonctions positives)***
Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ *et positives tq* $0 \leqslant f \leqslant g$
$\int_a^{+\infty} g$ *converge* $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f$ *converge et alors* $0 \leqslant \int_a^{+\infty} f \leqslant \int_a^{+\infty} g$

Proposition 12.1.8 ***Dérivation de*** $x \to \int_x^{+\infty} f$ ***si f est continue***

Soit $f \in \mathcal{C}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ *tq* $\int_a^{+\infty} f$ *converge.*

Alors l'application $F : \begin{cases} [a,+\infty[& \to \mathbb{K} \\ x & \to \int_x^{+\infty} f \end{cases}$ *est dérivable sur* $[a,+\infty[$ *de dérivée* $-f$

Car ...

12.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

12.2.1 Fonction intégrable sur $[a,+\infty[$

Définition 12.2.1 *Soit* $f \in \mathcal{CM}''([a,+\infty[,\mathbb{K})$. *On dira que f est intégrable sur* $[a,+\infty[$ *si et seulement si* $\int_a^{+\infty} |f|$ *converge*

Remarque 12.2.2 *On dit aussi que l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f$ *est absolument convergente.*

Théorème 12.2.3 *f intégrable sur* $[a,+\infty[\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f$ *converge, i.e. une intégrale absolument convergente est convergente.*

car ...

Exercice 12.2.4 *Montrer que la fonction* $t \to \dfrac{\sin t}{t^2}$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$.

ATTENTION La réciproque de ce théorème est fausse :

Exemple 12.2.5 *On considère la fonction définie sur* $[1, +\infty[$ *par :*
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [n, n+1[,\ f(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}$. *Montrons que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ *converge mais ne converge pas absolument.*

- $\displaystyle\int_1^n f = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k}$, *série qui converge (TSA) vers une limite qu'on notera* S.

$\forall x \geqslant 1,\ \displaystyle\int_1^x f = \int_1^{E(x)} f + \int_{E(x)}^x f$. *Quand* x *tend vers* $+\infty$, $\displaystyle\int_1^{E(x)} f$ *tend vers* S.

De plus, $\left|\displaystyle\int_{E(x)}^x f\right| \leqslant \dfrac{1}{E(x)}$ *qui tend vers* 0 *quand* x *tend vers* $+\infty$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ *converge*

- *Pour* $x \geqslant 2$, $\displaystyle\int_1^x |f| \geqslant \sum_{k=1}^{E(x)-1} \frac{1}{k}$. *Cette série diverge, donc* $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f|$ *diverge, i.e.* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ *ne converge pas absolument.*

Théorème 12.2.6 *Soit* $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ *et soit* $b \geqslant a$.
f *intégrable sur* $[a, +\infty[\iff f$ *intégrable sur* $[b, +\infty[$.

Car ...

12.2.2 Fonctions intégrables et à valeurs positives sur $[a, +\infty[$

Remarque 12.2.7 *Si* f *est* ***positive***, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge* $\iff \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge absolument.*

Théorème 12.2.8 *Soit* $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{R}_+)$, f *positive.*
f *intégrable sur* $[a, +\infty[\iff x \to \displaystyle\int_a^x f$ *est majorée*

Car la fonction $x \to \displaystyle\int_a^x f$ est croissante sur $[a, +\infty[$, donc elle admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée.

12.2.3 Intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$

Théorème 12.2.9 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$.
La fonction $t \to \dfrac{1}{t^\alpha}$ *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *si et seulement si* $\alpha > 1$.
Dans ce cas, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$

Car ...
Visualisation :

12.2.4 Comparaison des fonctions sur $[a, +\infty[$

Théorème 12.2.10 *Soit* $f, g \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ *tq* $|f| \leqslant |g|$ *sur* $[a, +\infty[$.
g *est intégrable sur* $[a, +\infty[\Longrightarrow f$ *est intégrable sur* $[a, +\infty[$

C'est une application directe du théorème 12.1.7

Théorème 12.2.11 *Soit* $f, g \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ *tq* $f = O_{+\infty}(g)$
g *intégrable sur* $[a, +\infty[\Longrightarrow f$ *intégrable sur* $[a, +\infty[$.

car ...

Théorème 12.2.12 *Soit* $f, g \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ *tq* $f = o_{+\infty}(g)$.
g *intégrable sur* $[a, +\infty[\Longrightarrow f$ *intégrable sur* $[a, +\infty[$.

C'est une conséquence du théorème du dessus.

Théorème 12.2.13 *Soit* $f, g \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ *tq* $f \underset{+\infty}{\sim} g$.
g *intégrable sur* $[a, +\infty[\iff f$ *intégrable sur* $[a, +\infty[$.

car $f \underset{+\infty}{\sim} g \Longrightarrow f = O_{+\infty}(g)$ et $g = O_{+\infty}(f)$

Exemple 12.2.14 *Etudier l'intégrabilité sur* $[1, +\infty[$ *des fonctions suivantes :*

1. $f : x \to \dfrac{1}{(2x-1)^2}$
2. $f : x \to \dfrac{\cos(x)}{x^2}$
3. $f : x \to \dfrac{1}{\ln(x+1)}$
4. $f : x \to x^2 e^{-x}$
5. $f : x \to \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$
6. $f : x \to \dfrac{\sqrt{x}}{1+2x}$
7. $f : x \to \dfrac{1}{(x-2)^2}$

12.2.5 Complément : limite en $+\infty$

Remarque 12.2.15 *ATTENTION :* f *intégrable sur* $[a, +\infty[$ *et* $f \geqslant 0 \not\Rightarrow \lim\limits_{+\infty} f = 0$

Voir l'exemple ci dessous :
En s'inspirant de l'exemple ci-dessus, construire une fonction f positive, intégrable sur $[1, +\infty[$

et non bornée.

Théorème 12.2.16 *Hors programme, mais à savoir redémontrer*
Soit $f \in \mathcal{CM}([a,+\infty[,\mathbb{K})$, intégrable sur $[a,+\infty[$.
Si f a une limite en $+\infty$ alors cette limite est nulle.

Tout simplement parce que si f a une limite finie ℓ non nulle, alors $f \underset{+\infty}{\sim} \ell$ Or la fonction $x \to \ell$ n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.
Si f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, alors au voisinage de $+\infty$, $f \geqslant 1$. Et la fonction $x \to 1$ n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.
Cqfd

12.3 Intégration sur un intervalle quelconque

12.3.1 Cas des intervalles semi-ouverts : $[a,b[$ ou $]a,b]$

Définition 12.3.1
— *Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$.*
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $x \to \displaystyle\int_a^x f$ a une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers b.
— *Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$.*
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $x \to \displaystyle\int_x^b f$ a une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a.
— *Dans tous ces cas, cette limite se notera $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ (premier cas) ou $\displaystyle\int_{]a,b]} f$ (second cas)*

Exemple 12.3.2 $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ *converge, car ... Et* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt = -1$

Exemple 12.3.3 *Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge et donnons sa valeur.*

Définition 12.3.4 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$ (resp $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$). On dira que f est intégrable sur $[a,b[$ ou au voisinage de b (resp $]a,b]$ ou au voisinage de a) si et seulement si $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge. On dit alors aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente.*

Proposition 12.3.5 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$ (resp $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$) avec $f \geqslant 0$.*
f est intégrable sur $[a,b[$ (resp $]a,b]$) si et seulement si la fonction $x \to \displaystyle\int_a^x f$ (resp $x \to \displaystyle\int_x^b f$) est majorée.

En effet ...

Théorème 12.3.6 *Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$. $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f$ converge.*
Même chose dans le cas où $f \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$.

Proposition 12.3.7 *Soit* $f, g \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{R})$.
Si $0 \leqslant f \leqslant g$, $\displaystyle\int_a^b g$ *CV* $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f$ *CV*

Mêmes types de démonstrations que dans le cas des fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.

Théorème 12.3.8 *Soit* $f, g \in \mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$.
- *Si* $|f| \leqslant |g|$, g *est intégrable sur* $[a,b[\Longrightarrow f$ *est intégrable sur* $[a,b[$.
- *Si* $f = O_b(g)$, g *est intégrable sur* $[a,b[\Longrightarrow f$ *est intégrable sur* $[a,b[$.
- *Si* $f \underset{b}{\sim} g$, g *est intégrable sur* $[a,b[\iff f$ *est intégrable sur* $[a,b[$.

Car ...
Écrire le théorème suivant

Théorème 12.3.9 *Soit* $f, g \in \mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{R})$.
- *Si* $|f| \leqslant |g|$,
-
-

12.3.2 Intégrales de Riemann sur $[a,b[$ et sur $]a,b]$

Théorème 12.3.10 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La fonction* $x \to \dfrac{1}{x^\alpha}$
- *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *si et seulement si* $\alpha > 1$
- *est intégrable sur* $]0, 1]$ *si et seulement si* $\alpha < 1$

car ...

Soient a et b réels avec $a < b$

Théorème 12.3.11 .
- *La fonction* $x \to \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ *est intégrable sur* $]a,b]$ *si et seulement si* $\alpha < 1$
- *La fonction* $x \to \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ *est intégrable sur* $[a,b[$ *si et seulement si* $\alpha < 1$

car ...

Exemple 12.3.12 *Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :*

1. $t \to \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}$ *sur* $[0, 2[$ *et sur* $]-2, 0]$
2. $f : t \to \dfrac{\sin(t)}{t^2+3t+5}$ *sur* $[1, +\infty[$.
3. $f : t \to \dfrac{\cos(t)}{t^\alpha}$ *sur* $]0, 1]$.
4. $f : t \to \dfrac{\sin(t)}{t}$ *sur* $]0, 1]$.
5. $f : t \to \dfrac{\sqrt{t^2-1}}{\sin(t-1)}$ *sur* $]1, 2]$.

12.3.3 Cas des intervalles ouverts

Définition 12.3.13 *Soit* $f \in \mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})$ *avec* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* $a < b$.
On dit que $\displaystyle\int_a^b f$ *converge si et seulement si* $\exists c \in]a,b[$ *tq* $\displaystyle\int_a^c f$ *et* $\displaystyle\int_c^b f$ *convergent toutes les deux.*
On dit que f *est intégrable sur* $]a,b[$ *si et seulement si* $\displaystyle\int_a^b |f|$ *converge*

Proposition 12.3.14 *Si* $\exists c \in]a,b[$ *tq* $\displaystyle\int_a^c f$ *et* $\displaystyle\int_c^b f$ *convergent toutes les deux, alors*
$\forall d \in]a,b[, \displaystyle\int_a^d f$ *et* $\displaystyle\int_d^b f$ *convergent.*
De plus, $\forall d \in]a,b[, \displaystyle\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^d f + \int_d^b f.$

car ...

Définition 12.3.15 *Soit* $f \in \mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})$ *tq* $\displaystyle\int_a^b f$ *converge, alors on pose* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
avec $c \in]a,b[$ *(*$\displaystyle\int_a^b f$ *ne dépend pas de* c *vue la propriété ci-dessus)*
Cette intégrale se note aussi $\displaystyle\int_I f$.

Exemple 12.3.16
1. $x \to e^{-x^2}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *car ...*
2. $x \to \dfrac{1}{x\sqrt{1-x}}$ *n'est pas intégrable sur* $]0,1[$ *car ...*
3. $x \to \dfrac{1}{x^\alpha}$ *n'est pas intégrable sur* $]0,+\infty[$*, et ceci quelque soit* α.
4. $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ *est intégrable sur* $]0,1[$.

12.3.4 Propriétés de l'intégrale sur l'intervalle I

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Proposition 12.3.17 ***Linéarité***
L'ensemble $\left\{ f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K}) / tq \displaystyle\int_I f \text{ converge} \right\}$ *est un* $\mathbb{K}-ev$.
De plus $f \to \displaystyle\int_I f$ *est linéaire.*

car ...

Proposition 12.3.18 ***Positivité***
Soit $f \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$.

— $f \geqslant 0$ *sur* I *et* $\displaystyle\int_I f$ *converge* $\Longrightarrow \displaystyle\int_I f \geqslant 0$.
— f *continue et positive sur* I. $\displaystyle\int_I f = 0 \Longrightarrow f = 0$ *sur* I

car ...

Conséquence 12.3.19 ***Croissance de l'intégrale***
Soit $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ *tq* $\int_I f$ *et* $\int_I g$ *convergent.*
$f \leqslant g \Longrightarrow \int_I f \leqslant \int_I g$

Car on sait que $\int_I (g-f)$ converge (linéarité) et $\int_I (g-f) \geqslant 0$ (positivité). Alors par linéarité de l'intégrale, on obtient le résultat.

Proposition 12.3.20 ***Relation de Chasles***
Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ *tq* $\int_I f$ *converge.*
$\forall a, b, c \in \overline{I},\ \int_a^b f,\ \int_b^c f\ \int_a^c f$ *convergent et* $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

Car ...

Proposition 12.3.21 ***Inégalité triangulaire***
Soit f, g *intégrables sur* I*. Alors* $f+g$ *est intégrable sur* I *et* $\int_I |f+g| \leqslant \int_I |f| + \int_I |g|$

Tout repose sur $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, ce qui prouve que $f+g$ est intégrable sur I. Puis on utilise la croissance de l'intégrale.

Corollaire 12.3.22 *L'ensemble des fonctions* f*, continues par morceaux sur* I *et intégrables sur* I *est un* $\mathbb{K}-ev$*. Cet espace se note* $L(I)$*.*

De plus $\begin{cases} L(I) & \to \mathbb{K} \\ f & \to \int_I f \end{cases}$ *est linéaire*

12.3.5 Intégration des relations de comparaison

Théorème 12.3.23 *Soit* $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ *avec* g *positive, où* $I = [a, b[$.

- *Si* $f = O_b(g)$*.* g *intégrable sur* $I \Longrightarrow f$ *intégrable sur* I *(on le savait déjà)*
  et alors $\int_x^b f = O_b\left(\int_x^b g\right)$
- *Si* $f = o_b(g)$*.* g *intégrable sur* $I \Longrightarrow f$ *intégrable sur* I *(on le savait déjà)*
  et alors $\int_x^b f = o_b\left(\int_x^b g\right)$
- $f \underset{b}{\sim} g$*.* g *intégrable sur* $I \iff f$ *intégrable sur* I *(on le savait déjà)*
  De plus
  - *Si* f *et* g *sont intégrables sur* I*,* $\int_x^b f \underset{x \to b}{\sim} \int_x^b g$
  - *Si* f *et* g *sont non intégrables sur* I*,* $\int_a^x f \underset{x \to b}{\sim} \int_a^x g$

car ...

Corollaire 12.3.24 *Ce théorème se décline aussi dans le cas où* $I =]a, b]$*.*
Si $I =]a, b[$*, alors il faut scinder l'intervalle en* $]a, c] et [c, b[$

Remarque 12.3.25 *Que dit ce théorème dans le cas où les fonctions sont équivalentes en b ?*
- *si elles sont intégrables, alors les "restes" sont équivalents en b*
- *si elles ne sont pas intégrables, alors les primitives sont équivalentes en b (cas des fonctions continues sur I pour qu'une primitive existe)*

Exemple 12.3.26
- *Donnons, en le justifiant, un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $x \to \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t+\sqrt{t}}$*
- *Donnons, en le justifiant, un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$*

Exercice 12.3.27 *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln(1-x)} \int_0^x \frac{dt}{e^t - e}$

12.4 Techniques de calculs

12.4.1 Changement de variable

Théorème 12.4.1 *Soit f continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
Soit φ une application de l'intervalle J dans I, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de J sur I.
Alors les intégrales $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_J f\circ\varphi.|\varphi'|$ sont de même nature et sont égales si elles sont convergentes.
Si $I =]a,b[$ et $J =]\alpha,\beta[$, alors
- *Si φ est croissante, $\displaystyle\int_I f = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(u)\varphi'(u)du$*
- *Si φ est décroissante, $\displaystyle\int_I f = \int_\beta^\alpha f\circ\varphi(u)\varphi'(u)du$*

Lemme 12.4.2 *φ continue et injective sur $I \Longrightarrow \varphi$ est strictement monotone sur I*

Ce lemme est important car souvent utilisé, il faut être capable d'en faire une démonstration ..
Pour la démonstration voir la feuille d'exercices "Continuité ..."
Démontrons alors le théorème

Exemple 12.4.3 *Calculons les intégrales suivantes si elles convergent :*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$

12.4.2 Intégration par partie

Théorème 12.4.4 *Soit f,g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et soit $a \in \overline{I}$ et $b \in \overline{I}$.*
Si le produit fg possède des limites finies en a et en b, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'.g$ et $\displaystyle\int_a^b f.g'$ sont

de même nature.
Si ces intégrales convergent alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_{t\to a}^{t\to b} - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

où $[f(t)g(t)]_{t\to a}^{t\to b} = \lim_{t\to b} f(t)g(t) - \lim_{t\to a} f(t)g(t)$

En effet ...

Notation 12.4.5 *L'expression* $[f(t)g(t)]_{t\to a}^{t\to b}$ *se note aussi* $[f(t)g(t)]_a^b$.

Exemple 12.4.6 *Calculer, si elle existe l'intégrale :* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$

Exemple 12.4.7

1. *Montrer que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ *sont de même nature.*
2. *En déduire la nature de* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$
3. *Montrer que la fonction* $t \to \dfrac{\sin(t)}{t}$ *n'est pas intégrable sur* $[1, +\infty[$.

Remarque 12.4.8 *On vient ainsi de montrer que la réciproque du théorème 12.3.6 est fausse.*

Exemple 12.4.9 *Soit* $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

1. *Pour quelles valeurs de l'entier* n *l'intégrale* I_n *est-elle définie ?*
2. *Dans ces conditions, exprimer* I_{n+1} *en fonction de* I_n.
3. *Exprimer* I_{n+1} *en fonction de* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)dx$

12.4.3 Attention

Il faut être très vigilant lorsqu'on décompose une fonction intégrable en somme de 2 ou plusieurs fonctions, par exemple dans le cas de décomposition en éléments simples. Prenons un exemple . Calculons $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$. La fonction f est définie par $f : t \to \dfrac{1}{t^2-1}$. f est clairement continue sur $I = [2, +\infty[$ et au voisinage de $+\infty$, $f(t) \sim \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable sur $[2, +\infty[$. Donc f est intégrable sur $[2, +\infty[$, l'intégrale à calculer est effectivement définie.
Pour la calculer, on va tenter d'utiliser la méthode employée pour les intégrales définies sur un segment, à savoir décomposer f en éléments simples. On trouve alors :
$\forall t \geqslant 2,\ f(t) = \dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{1/2}{t-1} - \dfrac{1/2}{t+1}$. Mais aucune des deux intégrales $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1/2}{t-1}dt$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1/2}{t+1}dt$ ne converge. Écrire que l'intégrale de f sur I serait égale à $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1/2}{t-1}dt - \int_2^{+\infty} \frac{1/2}{t+1}dt$ serait une ÉNORMITÉ.
Pour calculer l'intégrale de f sur I en utilisant la décomposition en éléments simples, on devra

revenir à la définition, c'est à dire calculer l'intégrale de f sur $[2, A]$. Dans ce cas, on est en présence d'une intégrale sur un segment, et on peut utiliser sans souci la décomposition en éléments simples. Une fois le calcul terminé, on fera tendre A vers $+\infty$ pour obtenir le résultat recherché.

Faites le calcul.

12.5 Des evn

12.5.1 Convergence en moyenne

Définition-théorème 12.5.1 *L'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{K}$ continues et intégrables sur I est un sev de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, qui est noté $L_c^1(I, \mathbb{K})$ ou $L_c^1(I)$ s'il n'y a pas de doute sur le corps $\mathbb{K}$.*
Cet ev est normé par $N_1 : f \to \int_I |f|$.
N_1 est appelée norme de la convergence en moyenne.

car ...

Remarque 12.5.2 *N_1 n'est pas une norme sur $L^1(I)$.*

Exercice 12.5.3 *Soit I un intervalle* ***borné*** *et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L_c^1(I)$ et soit $f \in L_c^1(I)$.*
Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour $\|.\|_\infty$ (i.e. (f_n) converge uniformément vers f) alors $\lim_n \int_I f_n = \int_I f$.
Montrer que si I n'est pas borné, cette propriété est fausse.

12.5.2 Convergence en moyenne quadratique

Définition 12.5.4 *Une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$ est dite de carré intégrable sur I si et seulement si la fonction $|f|^2$ est intégrable sur I.*
On note $L_c^2(I)$ l'ensemble de ces fonctions.

Proposition 12.5.5 $f, g \in L_c^2(I) \Longrightarrow fg \in L_c^1(I)$

car ...

Proposition 12.5.6 *$L_c^2(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel préhilbertien muni du produit scalaire : .*

$$\begin{cases} L_c^2(I) \times L_c^2(I) & \to \mathbb{K} \\ (f, g) & \to \displaystyle\int_I fg \end{cases}.$$

Car ...

Conséquence 12.5.7 *$N_2 : f \to \sqrt{\int_I f^2}$ est une norme (euclidienne)sur $L_c^2(I, \mathbb{R})$.*