Chapitre 15

Probabilités

15.1 Introduction

Les probabilités consistent à étudier les résultats aléatoires de certaines expériences. Par exemple, dans un lancer de 4 pièces, observer les piles obtenus, ou, autre exemple, dans un lancer de fléchette sur une cible, observer la position de la fléchette par rapport au centre de la cible. Lorsqu'une expérience est étudiée, on appellera "évènements" certains faits pouvant se produire (ou ne pas se produire). Dans le lancer de 4 pièces, par exemple, un évènement pourra être : obtenir exactement 1 pile et 3 faces Dans le lancer de fléchette, un évènement pourra être : la fléchette est à moins de 5 cm du centre de la cible.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas où l'ensemble des possibilités n'est pas nécessairement fini.

Pourquoi le formalisme élaboré dans le cas fini ne suffit-il pas quand l'espace des possibilités n'est pas fini ?

Classiquement, effectuons un jeu de Pile ou Face infini, et considérons l'évènement $A = \{\text{on ne tire jamais Pile}\}$.

Dans le cas où on n'effectue que n tirages, on sait calculer la probabilité de l'évènement $A_n = \{\text{On n'a pas tiré Pile lors des } n \text{ premiers lancers}\}$.

Le cours de première année permet de dire que $P(A_n) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{1}{2^n}$.

On peut dire alors que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, et on souhaite dire que $P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$.

Mais cela pose 2 questions : est-on sûr que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un évènement, qu'on peut en calculer la probabilité, et ensuite, comment justifier ce passage à la limite ?

15.2 Espaces probabilisés

15.2.1 Tribus évènements

Soit Ω un ensemble, appelé univers.

Définition 15.2.1 .

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est à dire que les éléments de $\mathcal{A}$ sont des sous-ensembles de Ω.
On dira que $\mathcal{A}$ est une ***tribu*** *sur Ω si et seulement si $\mathcal{A}$ vérifie les axiomes suivants :*
- *P1 : $\Omega \in \mathcal{A}$*
- *P2 : si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ (on dit que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable)*
- *P3 : $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (on dit que $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire)*

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un ***espace probabilisable****.*
Un élément de $\mathcal{A}$ est appelé ***évènement****.*
Un élément de Ω est appelé ***épreuve****.*

Conséquence 15.2.2 .

- *P4 : $\emptyset \in \mathcal{A}$*
- *P5 : si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ (on dit que $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable)*
- *P6 : toute réunion finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$ toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$*

En effet : P4 : c'est P3 appliqué à Ω
P5 : Car $(\bigcap A_i)^c = \bigcup (A_i^c)$ (à redémontrer).
Or $A_i \in \mathcal{A}$, donc $A_i^c \in \mathcal{A}$. Mais alors P2 entraîne $\bigcup\limits_{i\in I} A_i^c \in \mathcal{A}$, i.e. $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)^c \in \mathcal{A}$, et donc, grace à P3, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$
P6 : Soit $A_1, ..., A_n$ une suite finie d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors on définit la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en prenant $\forall k \geqslant n+1,\ A_k = \emptyset$ et on applique P2, avec $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$.
Pour l'intersection, on peut compléter la famille finie en posant pour $k \geqslant n+1$, $A_k = \Omega$.

Définition 15.2.3 .

- *A^c est appelé* ***évènement contraire*** *de A.*
- *A et B sont dits* ***incompatibles*** *ou* ***disjoints*** *ssi $A \cap B = \emptyset$*

Exemple 15.2.4 *$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est clairement une tribu sur Ω appelée tribu grossière.*

Cette tribu n'a pas grand intérêt car alors, les seuls évènement sont l'évènement certain Ω et l'évènement impossible $\emptyset$.

Exemple 15.2.5 *$\mathcal{P}(\Omega)$ est clairement une tribu. Dans le cas où Ω est fini ou dénombrable, on travaillera souvent avec cette tribu.*
Mais si Ω n'est ni fini ni dénombrable, alors, pour des raisons mathématiques, cette tribu est "trop grosse".

Exemple 15.2.6 *Soit $A \subset \Omega$ avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$. Alors $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ est une tribu. C'est la plus petite tribu contenant A*

Proposition 15.2.7 .

Une intersection de tribus sur Ω est encore une tribu sur Ω.

En effet, Notons $\mathcal{A}$ cette intersection des tribus $(\mathcal{T}_j)_{j\in J}$: $\mathcal{A} = \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_j$.

Toute tribu contenant Ω , alors $\Omega \in \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_j = \mathcal{A}$.

Soit $A \in \mathcal{A}$, alors $\forall j \in J$, $A \in \mathcal{T}_j$. $\mathcal{T}_j$ étant une tribu, alors $A^c \in \mathcal{T}_j$ et ceci $\forall j \in J$. Donc $A^c \in \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_j = \mathcal{A}$.

Enfin, Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors, $\forall \mathcal{T}_j$, $(A_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}_j$ et ceci pour tout $j \in J$, d'où $\forall j \in J$, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_j$ et donc $\bigcup_{i\in I} A_i \in \bigcap_{j\in J} \mathcal{T}_j = \mathcal{A}$.

Exemple 15.2.8 *Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On considère l'ensemble des tribus sur Ω contenant $\mathcal{B}$. L'intersection de toutes ces tribus est une tribu appelée tribu engendrée par $\mathcal{B}$. C'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{B}$*

En effet, Notons $\mathcal{A}$ cette intersection de toute les tribus contenant $\mathcal{B}$: $\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{B}\subset\mathcal{T}} \mathcal{T}$.

Toute tribu contenant $\mathcal{B}$ est une tribu, donc $\bigcap_{\mathcal{B}\subset\mathcal{T}} \mathcal{T} = \mathcal{A}$ est une tribu et cette tribu contient $\mathcal{B}$.

Par construction, c'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{B}$.

Exemple 15.2.9 *On appelle tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ la tribu engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$ (pas simple à visualiser, mais essentielle lorsqu'on étudie les probabilités sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas dénombrable, donc notion hors programme).*

15.2.2 Probabilités - espaces probabilisés

Définition 15.2.10 .

$(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
*On appelle **probabilité sur** $\mathcal{A}$ (ou mesure de probabilité) sur $\mathcal{A}$ toute application*

$$P : \begin{cases} \mathcal{A} \to \mathbb{R} \\ A \to P(A) \end{cases} \quad \textit{telle que :}$$

1. $P(\Omega) = 1$
2. *P est à valeurs positives*
3. *$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $\mathcal{A}$, telle que $\forall i, j,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$*
   alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ *(on dit que P est $\sigma-$additive)*

*On appelle **espace probabilisé** tout triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable, et P une probabilité sur $\mathcal{A}$.*

Remarque 15.2.11 *L'axiome de $\sigma-$additivité sous entend que la série* $\sum_n P(A_n)$ *converge dans le cas où les* A_n *sont disjoints 2 à 2 (ou 2 à 2 incompatibles)*

Remarque 15.2.12 *Si les évènements* A_i *ne sont pas deux à deux disjoints, il se peut que la série de terme général* $P(A_n)$ *diverge, voir par exemple le cas où tous les* A_n *sont égaux à un même évènement* A *de probabilité non nulle. Dans ce cas on notera* $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$

Proposition 15.2.13 *Propriétés élémentaires*

4. $P(\emptyset) = 0$
5. *Si* $A_1, \ldots, A_n$ *sont* n *évènements 2 à 2 incompatibles, alors*
   $P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$
   En particulier, si A *et* B *sont incompatibles, alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. $P(A^c) = 1 - P(A)$
7. $\forall A \in \mathcal{A},\ P(A) \in [0, 1]$
8. A *et* B *deux évènements quelconques,*
   alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
9. $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$ *et* $P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$

En effet

4. Il suffit de prendre la suite (A_n) définie par $A_n = \emptyset$, alors les A_n sont deux à deux disjoints et de réunion $\emptyset$ d'où $\sum_n P(\emptyset)$ converge. Or c'est une série de termes constants, donc $P(\emptyset) = 0$.
5. Ici on prend la suite (A_n) définie par $A_k = \emptyset$ pour $k \geqslant n + 1$ puis P4 et def 2.
6. $A \cup A^c = \Omega$ et $A \cap A^c = \emptyset$, donc A et A^c sont incompatibles, et on applique alors la propriété P5.
7. pour tout A, $P(A) = 1 - P(A^c)$, avec $P(A)$ et $P(A^c)$ positifs (P2).
8. $A \cup B = A \cup (B \backslash (A \cap B))$ et ensuite $B = (B \backslash A \cap B) \cup (A \cap B)$ où $B \backslash A \cap B$ et $A \cap B$ sont incompatibles. On utilise alors deux fois la propriété P5.
9. $A \subset B \Longrightarrow B = A \cup (B \backslash A)$ évènements qui sont incompatibles, et donc, $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$ donc $P(B) \geqslant P(A)$.

15.2.3 Probabilité dans le cas particulier où Ω est fini ou dénombrable, et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

Soit Ω un ensemble au plus dénombrable, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ la tribu sur Ω et P une probabilité sur $\mathcal{A}$.
Pour $\omega \in \Omega$, notons $A_\omega = \{\omega\}$ et $p_\omega = P(A_\omega) = P(\{\omega\})$.
$\forall \omega, \omega', \omega \neq \omega' \Longrightarrow A_\omega \cap A_{\omega'} = \emptyset$, donc les A_ω sont 2 à 2 incompatibles et de réunion Ω.
$\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega$ et cette réunion est dénombrable.
Alors $P(\Omega) = P\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega\right) = \sum_{\omega \in \Omega} P(A_\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.

Donc $\{p_\omega/\omega \in \Omega\}$ est une famille sommable de réels positifs et de somme 1.

Réciproquement : Soit $(q_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une famille de réels positifs sommables de somme 1.

Soit P : $\begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R}_+ \\ \\ A & \to & P(A) = \displaystyle\sum_{\omega\in A} q_\omega \end{cases}$ Montrons que P est une probabilité.

$\{q\omega\}_{\omega\in\Omega}$ est sommable sur Ω donc sur $A \subset \Omega$, donc $\displaystyle\sum_{\omega\in A} q_\omega$ existe, P est bien définie.
Or $\forall\omega \in \Omega,\ q_\omega \geqslant 0$, donc $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) \geqslant 0$.
$P(\Omega) = \displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} q_\omega = 1$ (hypothèse sur les $q\omega$).

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ avec les A_j disjoints 2 à 2, et soit $B = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$. Les A_k constituent une partition de B. Or la famille $\{q_\omega\}$ est sommable sur Ω donc aussi sur $B \subset \Omega$. Alors, par le théorème de sommation par paquets, cette famille est sommable sur tous les A_k et la série des sommes sur les A_k converge, i.e. $\forall k \in \mathbb{N},\ \{q_\omega\}_{\omega\in A_k}$ sommable, et sa somme vaut par définition $P(A_k)$; de plus $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{\omega\in B} q_\omega = P(B) = P(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k)$ ce qui achève de montrer que P est une probabilité.
Donc

Théorème 15.2.14 .

Si Ω est fini ou dénombrable, et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ s'identifie via la formule $p(\{\omega\}) = p_\omega$ à une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommables de somme 1, en posant $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \displaystyle\sum_{\omega\in A} p_\omega$.

Exemple 15.2.15 *Soit $p \in]0,1[$ et $\Omega = \mathbb{N}^*$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*,\ P(\{n\}) = \lambda p^n$. Déterminer λ en sorte que P ainsi définie soit une probabilité.*

Vu le théorème, P permet de définir une probabilité ssi la famille $(\lambda p^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable de somme 1.
Or $0 < p < 1 \Longrightarrow \sum p^n$ converge (c'est une famille de réels positifs, c'est donc équivalent à dire que la famille est sommable) et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} p^n = \frac{p}{1-p}$.
P est donc une probabilité ssi $\lambda = \dfrac{1-p}{p}$ et donc $\forall n \geqslant 1,\ P(\{n\}) = (1-p)p^{n-1}$. on reverra cette probabilité plus tard.

Exemple 15.2.16 *ici $\Omega = \mathbb{N}$ et soit $\theta > 0$. On pose pour $n \in \mathbb{N},\ P(\{n\}) = \lambda\dfrac{\theta^n}{n!}$. Déterminer λ en sorte que P ainsi définie soit une probabilité.*

Un rapide calcul montre que $\lambda = e^{-\theta}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{n\}) = e^{-\theta}\dfrac{\theta^n}{n!}$. Cette probabilité, qu'on reverra plus tard se nomme loi de Poisson de paramètre θ

15.2.4 Continuité croissante ou décroissante d'évènements

Théorème 15.2.17 .

1. *$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements croissante pour l'inclusion i.e.* $\forall n,\ A_n \subset A_{n+1}$.
   Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$
2. *$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements décroissante pour l'inclusion i.e.* $\forall n,\ A_{n+1} \subset A_n$.
   Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

En effet :

1. $\displaystyle P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{+\infty}(A_k\backslash A_{k-1})\right)$. Or les $A_k\backslash A_{k-1}$ sont disjoints 2 à 2, et disjoints avec A_0.
   Donc $\displaystyle P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P(A_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k\backslash A_{k-1}) = P(A_0) + \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} P(A_k\backslash A_{k-1}) = \lim_n P(A_n)$
2. Remarquons que la suite $(A_0\backslash A_k)$ est croissante pour l'inclusion.
   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_0\backslash A_n) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}(A_0\backslash A_k)\right)$ en vertu de la première partie, démontrée, de ce théorème.
   Le membre de gauche vaut $\lim_n(P(A_0) - P(A_n))$ car $A_n \subset A_0$, et donc
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_0\backslash A_n) = P(A_0) - \lim_n P(A_n)$ **(1)**.
   Or on montre par double inclusion (à faire) que : $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}(A_0\backslash A_k) = A_0\backslash\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k$.
   De plus $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k \subset A_0$ donc $\displaystyle P(A_0\backslash\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k) = P(A_0) - P(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k)$ **(2)**.
   (1) et **(2)** permettent de conclure.

Proposition 15.2.18 .

Pour toute suite d'évènements (A_n) on a : $\displaystyle P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ *(en convenant que si* $\sum P(A_n)$ *diverge alors* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$*)*

En effet :
$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = A_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} (A_k \cap A_n) \right) \right)$ et tous les évènements de la réunion du second membre sont incompatibles, et $A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} (A_k \cap A_n) \subset A_n$.

Donc $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = P(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P\left(A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} (A_k \cap A_n) \right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

15.2.5 Évènements négligeables, presques sûrs

Définition 15.2.19 .

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$.

1. *On dira que A est* ***négligeable*** *si et seulement sa probabilité est nulle :*
   A négligeable $\iff P(A) = 0$
2. *On dira qu'un évènement A est* ***presque sûr*** *si et seulement si sa probabilité est égale à 1 :*
   A est presque sûr $\iff P(A) = 1$.

Proposition 15.2.20 .

Une réunion finie ou dénombrable d'évènements négligeables est négligeable.
Une intersection finie ou dénombrable d'évènements presque sûrs est presque sûre.

En effet : * On a vu que $P(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n P(A_n)$. Or si tous les A_n sont négligeables, alors $P(A_n) = 0$ pour tout n, et donc la somme de la série est nulle, et donc $P(\bigcup_n A_n)$ est nulle aussi.

* Si $\forall n,\ P(B_n) = 1$ alors $P(B_n^c) = 0$ et $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n^c) = 0$ (vu au dessus)

Or $\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n = \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n^c \right)^c$. Donc $P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n) = 1$.

15.3 Probabilités conditionnelles

15.3.1 Définition

Supposons que les faces paires d'un dé à 6 faces soient blanches et les faces impaires soient noires. On lance ce dé. De loin on voit que la face du dessus est blanche ; quelle est la probabilité que ce soit un 6 ? Tout le monde répondra 1/3 et non pas 1/6. L'information sur la couleur de la face du dessus a modifié la manière de calculer les probabilités des évènements élémentaires. Sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on attribue la probabilité 0 aux évènements élémentaires $\{1\},\ \{3\}, \{5\}$ et 1/3 aux évènements $\{2\},\ \{4\}, \{6\}$.
Si on note A l'évènement "la face du dessus est blanche", on définit une nouvelle probabilité notée P_A ou $P(\cdot|A)$ définie par :

$$P(\{i\}|A) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } i = 2,4,6 \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{ce qui revient à dire que } P(\{i\}|A) = \frac{P(\{i\} \cap A)}{P(A)}$$

Définition-théorème 15.3.1 .

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et soit A un évènement de probabilité non nulle.
Pour tout évènement B de $\mathcal{A}$ on pose $P(B|A) = P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
P_A est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, appelée probabilité conditionnelle relative à A (ou probabilité sachant A)

En effet :

— P_A est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}_+$ car :
$\forall B \in \mathcal{A},\ A \cap B \in \mathcal{A}$ et donc $P(A \cap B)$ existe, et donc $P_A(B)$ existe et est positif.

— $P_A(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

— Soit (B_n) une suite d'évènements disjoints 2 à 2. Alors
$$P_A(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n) = \frac{P\left(A \cap (\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n)\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (A \cap B_n)\right)}{P(A)}$$
Or $(A \cap B_n)$ est une suite d'évènements disjoints 2 à 2, donc :
$$P_A(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n) = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A \cap B_n)}{P(A)} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_A(B_n)$$ et donc P_A est bien une mesure de probabilité.

Proposition 15.3.2 .

Soit A et B évènements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
Alors $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$

Clair : il suffit décrire les définitions des deux probabilités conditionnelles.

Proposition 15.3.3 .

A et B deux évènement de $\mathcal{A}$, tels que $P(A) \neq 0$
- *$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(B|A) = 0$*
- *$A \subset B \Longrightarrow P(B|A) = 1$*

Clair en revenant à la définition.

15.3.2 Formule des probabilités totales et composées (aussi appelée formule de l'intersection).

Définition 15.3.4 .

Système complet d'évènements
On dit qu'une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements est un système complet d'évènements si et seulement si :

1. *les évènements sont 2 à 2 disjoints i.e.* $i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$

En langage ensembliste, c'est donc une partition dénombrable de Ω en éléments de $\mathcal{A}$

Remarque 15.3.5 *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements de Ω alors* $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$

Théorème 15.3.6 .

Formule des probabilités totales
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements tous de probabilité non nulle. Alors pour tout évènement B on a :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$$

En effet : $\Omega = \displaystyle\bigcup_n A_n$. Alors $P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (\displaystyle\bigcup_n A_n)) = P(\displaystyle\bigcup_n (B \cap A_n))$ Or les A_n sont 2 à 2 disjoints, donc les $B \cap A_n$ sont aussi 2 à 2 disjoints.
D'où $P(B) = \displaystyle\sum_n P(B \cap A_n) = \displaystyle\sum_n P(B|A_n)P(A_n)$ Conséquence :

Théorème 15.3.7 *Formule de Bayes*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements, tous de probabilité non nulle et B un évènement de probabilité non nulle. Alors pour tout entier k,

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\displaystyle\sum_n P(B|A_n)P(A_n)}$$

Car $P(A_k|B) = \dfrac{P(B \cap A_k)}{P(B)} = \dfrac{P(B|A_k)P(A_k)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)}$.

Remarque 15.3.8 *Cette formule s'appelle aussi formule de probabilité des causes. En effet, si les évènements A_k sont appelés causes, alors $P(A_k|B)$ est la probabilité que, sachant que B est réalisé, ce soit A_k qui en soit la cause.*

Remarque 15.3.9 *Ces deux théorèmes restent vrais si, au lieu d'une famille dénombrable formant un système complet d'évènements on a une famille finie formant un système complet d'évènements : les démonstrations sont identiques. Dans ce cas, dans les deux théorèmes les séries seront remplacées par des sommes finies.*

Exercice 15.3.10 *Dans une ville, deux compagnies de taxis opèrent : les Verts, qui représentent 85% de la flotte totale, et les Bleus, qui ont les 15% restants. Un accident survient la nuit et le véhicule impliqué quitte la scène. Un témoin affirme qu'il s'agissait d'un taxi Bleu. Quelle est la probabilité que le taxi responsable soit effectivement un Bleu, sachant que la fiabilité des témoignages dans des conditions analogues à celles prévalant lors de l'accident est évaluée à 80% (les témoins identifient correctement la couleur du taxi dans 80% des cas, et se trompent dans 20%) ? (Roch Ouellet)*

Prenons $\Omega = \{b, v\} \times \{b, v\}$. Le premier élément de chaque couple indiquant la couleur du taxi causant l'accident, et le second élément du couple, la couleur annoncée par le témoin.
Notons B l'évènement : c'est un taxi bleu qui a causé l'accident, alors $B = \{b\} \times \{b, v\}$
Notons V l'évènement : c'est un taxi vert qui a causé l'accident, alors $V = \{v\} \times \{b, v\}$
Notons Tb l'évènement : le témoin a vu une voiture bleue, alors $Tb = \{b, v\} \times \{b\}$.
On sait que $P(B) = 0,15$, $P(V) = 0,85$ et $P(Tb|B) = 0,8$ et $P(Tb|V) = 0,2$.
On demande $P(B|Tb)$. Terminer la résolution.

Exemple 15.3.11 *On dispose de N urnes U_1, $U_2, ..., U_N$. Pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant N$, l'urne U_i contient b_i boules blanches et r_i boules rouges. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne. Montrons que la probabilité d'obtenir une boule blanche vaut* $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{r_i + b_i}$

On pourra commencer par prendre $\Omega = [\![1, N]\!] \times \{b, r\}$

Théorème 15.3.12 ***Formule des probabilités composées***

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'évènements telle que $P(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &= P(A_1)P(A_2|A_1)...P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \\ &= P(A_1)\frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}\frac{P(A_3 \cap A_2 \cap A_1)}{P(A_2 \cap A_1)}...\frac{P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)}{P(A_1 \cap ... \cap A_{n-1})} \end{aligned}$$

En effet, Pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $A_1 \cap ... \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap ... \cap A_j$ et donc, toutes les probabilités intervenant dans ce théorème ont bien un sens, car les probabilités des intersections $A_1 \cap ... \cap A_j$ sont toutes non nulles. .
La démonstration se fait alors simplement en partant de la seconde ligne (à faire)

Exemple 15.3.13 *On dispose de n clés pour ouvrir une porte. On les essaye à tour de rôle, en les mettant de côté après essai. Quelle est la probabilité que la porte s'ouvre au kième essai ?*

15.4 Évènements indépendants.

15.4.1 Couples d'évènements indépendants.

Soient A et B deux évènements de probabilité non nulle. En général, $P(A|B)$ est différent de $P(A)$. Intuitivement, A est indépendant de B lorsque la probabilité de A est la même que l'on

sache que B est réalisé on non, c'est à dire lorsque $P(A|B) = P(A)$, i.e. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
Remarquons que cette dernière égalité a encore un sens si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.
Remarquons aussi que cette dernière écriture est symétrique, donc si A est indépendant de B alors B est indépendant de A.
Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 15.4.1 ***Evènements indépendants***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
On dit que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité P lorsque : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Remarque 15.4.2 *A et B des évènements de probabilités non nulles. A et B disjoints entraîne A et B ne sont pas indépendants.*

Clair.

Exemple 15.4.3 *On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. On note D l'évènement "la carte tirée est une Dame", et T l'évènement "la carte tirée est un Trèfle".*
Ces deux évènements sont-ils indépendants ?

Proposition 15.4.4 .

Soit $A,\ B \in \mathcal{A}$
- *A et B sont indépendants $\Longleftrightarrow$ A et B^c sont indépendants.*
- *Si $P(A) = 1$ ou $P(A) = 0$ alors tout évènement B est indépendant de A*
- *Si (A_n) est une suite d'évènements 2 à 2 incompatibles et si pour tout n, B est indépendant de A_n alors B est indépendant de $\bigcup_n A_n$*

En effet :
- $P(A \cap B^c) = P(A|(A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$ donc A et B^c sont indépendants. L'implication directe est donc prouvée.
  Pour la réciproque, appliquons cette implication, prouvée, à A et B^c. A et B^c indépendants $\Longrightarrow$ A et $(B^c)^c$ sont indépendants, ce qui prouve la réciproque.
- Supposons $P(A) = 0$. Vu que $A \cap B \subset A$ alors $P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$
  Si $P(A) = 1$ alors $P(A^c) = 0$, donc B et A^c sont indépendants, donc A et B sont indépendants.
- Car les A_n étant incompatibles 2 à 2 alors les $B \cap A_n$ sont incompatibles 2 à 2.

$$\begin{aligned} P(B \cap (\bigcup_n A_n)) &= P(\bigcup_n (B \cap A_n)) = \sum_n P(B \cap A_n) \qquad (1) \\ &= \sum_n P(B)P(A_n) = P(B) \sum_n P(A_n) \\ &= P(B)P(\bigcup_n A_n) \qquad (2) \end{aligned}$$

(on justifiera la dernière égalité de (1) et l'égalité (2))

Conséquence 15.4.5 *A et B indépendants $\Longleftrightarrow$ A et B^c indépendants $\Longleftrightarrow$ A^c et B indépendants $\Longleftrightarrow$ A^c et B^c indépendants.*

15.4.2 Familles d'évènements mutuellement indépendants.

Définition 15.4.6 ***Évènements mutuellement indépendants***

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements. On dit que les évènements sont mutuellement indépendants si et seulement si, pour toute suite finie $A_{i_1},..,A_{i_n}$ d'évènements distincts on a :

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}) = P(A_{i_1})...P(A_{i_n})$$

Remarque 15.4.7 *Si n évènements sont mutuellement indépendants, alors ils sont 2 à 2 indépendants. Mais la réciproque est fausse : des évènements 2 à 2 indépendants ne sont pas nécessairement mutuellement indépendants.*

Exemple 15.4.8 *Traduire le fait que les 3 évènements A, B et C sont mutuellement indépendants.*

Exemple 15.4.9

On lance deux fois un dé cubique parfait. On considère les évènements suivants :
A : le premier nombre obtenu est pair
B : le second nombre obtenu est impair
C : la somme des 2 nombres obtenus est paire.
Montrons que ces évènements sont 2 à 2 indépendants.
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ et Card $\Omega = 36$.
$A = \{2,4,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ et donc $P(A) = \dfrac{3\times 6}{36} = \dfrac{1}{2}$
$B = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,3,5\}$ et donc $P(B) = \dfrac{6\times 3}{36} = \dfrac{1}{2}$
$C = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\} \cup \{1,3,5\} \times \{1,3,5\}$ et donc $P(C) = \dfrac{3\times 3 + 3\times 3}{36} = \dfrac{1}{2}$
$A\cap B = \{2,4,6\} \times \{1,3,5\}$ et donc $P(A\cap B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = P(A)P(B)$
$A\cap C = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}$ et donc $P(A\cap C) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = P(A)P(C)$
$B\cap C = \{1,3,5\} \times \{1,3,5\}$ et donc $P(B\cap C) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} = P(B)P(C)$
Donc ces 3 évènements sont deux à deux indépendants.
Mais $A\cap B\cap C = \emptyset$ et donc $P(A\cap B\cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$: ces 3 évènements ne sont pas mutuellement indépendants.