Chapitre 2

Réduction des endomorphismes

2.1 Sous espaces stables

Définition 2.1.1 *Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, et $u \in \mathcal{L}(E)$*
*On dira que F **est stable par** u si et seulement si $u(F) \subset F$, c'est à dire $\forall x \in F,\ u(x) \in F$*
Dans ce cas, la restriction de u à F est un endomorphisme de F. On l'appelle l'endomorphisme induit par u sur F

Conséquence 2.1.2 *Plaçons nous dans le cas où $dim(E) = n$ et $dim(F) = p$.*
Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ une base de E adaptée à F, c'est à dire une base dont les p premiers vecteurs forment une base de F et les $n-p$ autres forment une base d'un supplémentaire de F dans E.
F est stable par $u \iff Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (matrice par blocs) où A est la matrice de u dans la base $(e_1, ..., e_p)$ de F.
Donc F stable par $u \iff \exists \mathcal{B}$ base de E adaptée à F telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est une matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$
Dans ce cas, $det(u) = det(A)det(C) = det(u_{|F})det(C)$

Généralisation : $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$

Les sev F_k sont stables par u si et seulement si $\forall \mathcal{B}$ base de E avec $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{B}_k$ et $\mathcal{B}_k$ base de F_k,

alors $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & A_p \end{pmatrix}$

On dit que u est diagonalisable par blocs.

Théorème 2.1.3 *Soit E ev de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.*
u est diagonalisable par blocs si et seulement si il existe $F_1, ..., F_p$ des sev de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$

avec $\forall k,\ F_k$ *est stable par* u.

Proposition 2.1.4 *Soient* $u, v \in \mathcal{L}(E)$. u *et* v *commutent* $\Longrightarrow Im(u)$ *et* $Ker(u)$ *sont stables par* v.

À vous de faire cette démonstration.

2.2 Éléments propres

2.2.1 Cas d'un endomorphisme

Définition 2.2.1 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\lambda \in K$.
On dira que λ *est* ***valeur propre de*** u *si et seulement si* $\exists x \in E$ *tel que* $x \neq 0$ *et* $u(x) = \lambda x$
Un tel vecteur x *est appelé* ***vecteur propre de*** u *associé à la valeur propre* λ.

D'où

Définition 2.2.2 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $x \in E$

On dira que x *est* ***vecteur propre de*** u $\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \neq 0 \\ \text{et} \\ \exists \lambda \in K,\ u(x) = \lambda x \end{array} \right.$

Remarque 2.2.3 *Le vecteur nul 0 n'est pas un vecteur propre.*

Proposition 2.2.4 λ *est valeur propre de* u

$$\begin{array}{cc} \Longleftrightarrow & Ker(\lambda id_E - u) \neq \{O_E\} \\ \Longleftrightarrow & L\text{'endomorphisme } \lambda id_E - u \text{ n'est pas injectif} \end{array}$$

Conséquence 2.2.5 ***Important***
u non injectif $\Longleftrightarrow$ 0 *est valeur propre de* u

Clair ...

Proposition 2.2.6 x *est vecteur propre de* $u \Longleftrightarrow x \neq 0$ *et* $Vect(x)$ *est stable par* u

En effet ...

Remarque 2.2.7 *Donc, chercher les vecteurs propres de* u *revient à chercher les droites vectorielles stables par* u.

Définition 2.2.8 $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* λ *une valeur propre de* u.
Le sous espace $Ker(\lambda id_E - u) = Ker(u - \lambda id_E)$ *est appelé* ***sous-espace propre de*** u *associé à la valeur propre* λ *et souvent noté* $E_\lambda(u)$

Remarque 2.2.9
- *Un sous espace propre n'est jamais réduit au vecteur nul, donc est toujours de dimension supérieure ou égale à 1*
- *Un sev propre est constitué de tous les vecteurs propres associés à la valeur propre et du vecteur nul(qui n'est pas considéré comme un vecteur propre).*

Exemple 2.2.10
- $E = \mathbb{R}^2$ *et* $\mathcal{B}$ *la base canonique. Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *de matrice dans* $\mathcal{B}$: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. *Montrer que* u *a exactement 2 valeurs propres qui sont* 1 *et* 2.

— $u = \alpha id_E$. *Montrer que u a 1 et 1 seule valeur propre.*

— $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. *Soit* $D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \to & f' \end{array} \right.$

Montrer que tout réel λ *est valeur propre de* D, *et déterminer le sous-espace propre associé à la valeur propre* λ.

— $E = K[X]$ *et* $D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \to & P' \end{array} \right.$. *Montrer que* D *n'a qu'une seule valeur propre à déterminer (penser à travailler sur le degré des polynômes). Quel est alors le sev propre de* D ?

Définition 2.2.11 *L'ensemble des valeurs propres de* u *est appelé le* ***spectre de*** u *et noté* $Sp(u)$.

2.2.2 Sous-espaces propres

Somme directe de sev

Définition 2.2.12 *Soit* E *un espace vectoriel.*
Soit F, G, H *des sev de* E. *On sait que* $F+G+H$ *est encore un sev de* E. *Mais rien ne dit que ce sev c'est* E *tout entier. Peu importe. On notera* SM *cet espace somme :* $SM = F+G+H$. $SM \subset E$.
On dira que la somme $F+G+H$ *est directe si et seulement si* $\forall u \in F+G+H,\ \exists!(x,y,z) \in F \times G \times H$ *tq* $u = x+y+z$.
Dans ce cas, pour dire que la somme possède cette propriété de somme directe, on écrira $F+G+H = F \oplus G \oplus H$

Exemple 2.2.13 *Dans* $\mathbb{R}^3$, $F = Vect(e_1)$ *où* $e_1 = (1,0,0)$, $G = Vect(e_2)$ *où* $e_2 = (0,1,0)$ *et* $H = Vect(e_3)$ *où* $e_3 = (1,1,0)$.
Soit $u = (2,3,0)$, $u \in F+G+H$ *car* $u = 2e_1 + 3e_2$. *Mais la somme n'est pas directe car u s'écrit aussi* $u = e_2 + 2e_3$ *La décomposition n'est pas unique.*
Second exemple : $E = \mathbb{R}^4$, $F = Vect(e_1)$ *où* $e_1 = (1,0,0,0)$, $G = Vect(e_2)$ *où* $e_2 = (1,1,0,0)$ *et* $H = Vect(e_3)$ *où* $e_3 = (1,1,1,0)$. *La somme est directe, car soit* $u \in F+G+H$, *alors* $\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ *tq* $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. *Un vecteur de la somme s'écrit donc* $(\alpha+\beta+\gamma, \beta+\gamma, \gamma, 0)$, *et cette écriture est unique (à vérifier).*

Théorème 2.2.14 *Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est une famille libre.*
Autrement dit, $\forall \lambda_1, .., \lambda_p$ *valeurs propres de u deux à deux distinctes, et* $\forall x_1, ..., x_p$ *vecteurs propres tels que* x_k *est vecteur propre associé à* λ_k, *alors* $(x_1, ..., x_p)$ *est libre*

Car ...

Conséquence 2.2.15 *La somme d'une famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2 est directe*

car

Conséquence 2.2.16 *Si* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$, *alors u possède au maximum n valeurs propres distinctes, autrement dit,* $Card(Sp(u)) \leqslant dim(E)$

Car chacun des sous espaces propres étant de dimension supérieure ou égale à 1, et les sous espaces propres étant en somme directe, il ne peut pas y avoir plus de n sous-espaces propres.

Théorème 2.2.17 *u et $v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent alors tout sev propre de u est stable par v.*

En effet, si u et v commutent, alors $u - \lambda id_E$ et v commutent et donc, $\mathrm{Ker}(u - \lambda id_E)$ est stable par v.

Conséquence 2.2.18 *Tout sev propre de u est stable par u*

car u et u commutent ... (on peut aussi faire une démonstration directe)

2.2.3 Cas d'une matrice carrée

Définition 2.2.19 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$*

— *Soit $\lambda \in K$. On dit que λ est **valeur propre** de A*

$$\begin{array}{ll} \textit{si et seulement si} & \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \neq 0 \textit{ et } AX = \lambda X \\ \textit{si et seulement si} & \lambda I_n - A \textit{ est non inversible} \\ \textit{si et seulement si} & det(\lambda I_n - A) = 0 \end{array}$$

— *On dira que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ est **vecteur propre** de A si et seulement si $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in K,\ AX = \lambda X$*

— *L'ensemble des valeurs propres de la matrice A s'appelle le **spectre** de A et se note $Sp(A)$*

— *L'ensemble des $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ tq $AX = \lambda X$ est appelé **sev propre** de A associé à la valeur propre λ et se note souvent $E_\lambda(A)$*

Théorème 2.2.20 *$Dim(E) = n$, $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}$: $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Alors*

— *u et A ont le même spectre.*

— *x vecteur propre de u associé à $\lambda \iff$ la matrice colonne X des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ est vecteur propre de A associé à λ*

clair car ..

Conséquence 2.2.21 *Deux matrices semblables ont le même spectre*

Rappel : Les matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables $\iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$

Mais la réciproque de ce théorème est fausse : les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont le même spectre, mais elles ne sont pas semblables. En effet, **seule I est semblable à I** car $P^{-1}IP = P^{-1}P = I$, et B n'est pas la matrice I, donc I et B ne sont pas semblables, pourtant elles ont le même spectre $\{1\}$.

Proposition 2.2.22 $0 \in Sp(A) \iff det(A) = 0$
i.e. Toute matrice non inversible possède 0 pour valeur propre

C'est clair en revenant à la définition d'une valeur propre. Mais c'est très important.

Théorème 2.2.23 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On sait que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset Sp_{\mathbb{C}}(A)$*

Clair car ...

Remarque 2.2.24 *Il n'y a pas nécessairement égalité : par exemple* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Montrer que* $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ *et déterminer* $Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

Remarque 2.2.25 *Ce théorème se généralise à tous corps* $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$.

2.2.4 Polynôme caractéristique

2.2.4.1 Des définitions

Définition 2.2.26 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle ***polynôme caractéristique de*** A *le polynôme noté* $\chi_A = det(XI_n - A) = (-1)^n det(A - XI_n)$

Exemple 2.2.27 • *Déterminer* χ_A *où* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *On trouve :* $\chi_A = (X-2)^2 X$

• *Même question pour la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Théorème 2.2.28 $Sp(A)$ *est l'ensemble des racines de* χ_A

Clair en revenant à la définition d'une valeur propre, mais fondamental : pour déterminer les valeurs propres de A on calcule son polynôme caractéristique et on en cherche les racines.

Proposition 2.2.29 *Soit* A *et* B *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- A *et* B *semblables* $\Longrightarrow \chi_A = \chi_B$.
- $\chi_A = \chi_{^tA}$

car $\exists P \in GL_n(K)$ tel que $B = P^{-1}AP$.
Alors $\chi_B = det(XI - B) = det(XP^{-1}IP - P^{-1}AP) = det(P^{-1}(XI - A)P) = det(XI - A) = \chi_A$
D'où

Définition 2.2.30 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $dim(E) = n$.
On appelle ***polynôme caractéristique de u*** *le polynôme noté* χ_u *défini par*

$$\chi_u = det(Xid_E - u) = (-1)^n det(u - Xid_E)$$

Exemple 2.2.31 $E = K_n[X]$ *et* $D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \to & P + P' \end{array} \right.$. *Quel est le polynôme caractéristique de* D *?*

2.2.4.2 Coefficients

Proposition 2.2.32 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$\chi_A(X) = X^n - tr(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n det(A)$

Car ...

Conséquence 2.2.33
- *Dans le cas où* $n = 2$, *le polynôme caractéristique s'obtient très facilement c'est* $X^2 - tr(A)X + det(A)$
- $K = \mathbb{C} \Longrightarrow Sp_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$
- $K = \mathbb{R}$ *et* n *impair* $\Longrightarrow Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$
- $Card(Sp(A)) \leqslant n$ *(on le savait déjà)*

2.2.5 Quelques cas particuliers

Proposition 2.2.34 *Si A est triangulaire :* $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a_{n-1} & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}$

alors $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$

Remarque 2.2.35 *On a vu que :* $\chi_A = det(XI_n - A) = (-1)^n det(A - XI_n)$

La seconde expression peut être plus pratique dans un calcul car elle n'impose pas de changer tous les signes des coefficients de A.

Théorème 2.2.36 — *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice définie par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(K)$. Alors $\chi_M = \chi_A . \chi_C$*

— *Si F est un sev stable par u, notons $\tilde{u}$ la restriction de u à F. Alors $\chi_{\tilde{u}}$ divise χ_u dans $\mathbb{K}[X]$*

car ...

2.2.5.1 Multiplicité d'une valeur propre

Définition 2.2.37 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in Sp(A)$.*
On appelle ***ordre de multiplicité de*** *λ sa multiplicité en tant que racine du polynôme χ_A.*
Cette multiplicité se notera souvent mul(λ)
Donc $mul(\lambda) = r \iff \chi_A = (X - \lambda)^r R$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$ et $R(\lambda) \neq 0$

Attention : il y aura deux manières de compter les valeurs propres :
1) on énumère les valeurs propres distinctes 2 à 2 : $\lambda_1, ...\lambda_p$
2) on les compte avec leur multiplicité, i.e. on écrit chaque valeur propre autant de fois que sa multiplicité.

Par exemple soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ alors $Sp(A) = \{1, 2\}$ mais parler des valeurs propres comptées avec leur multiplicité revient à écrire l'ensemble des valeurs propres ainsi $\{1, 2, 2, 2\}$, i.e. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 2$

Remarque 2.2.38 *Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres se lisent sur la diagonale et leur multiplicité aussi. Ce résultat est en général faux pour une matrice non triangulaire*

Proposition 2.2.39 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si χ_A est scindé (ce qui est le cas sur $\mathbb{C}$), alors A possède n valeurs propres comptées avec leur multiplicité et*

$$\mathrm{tr(A)} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \lambda_{\mathrm{k}} \ \textit{et}\ \mathrm{det(A)} = \prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \lambda_{\mathrm{k}}$$

Car $\chi_A = X^n - \mathrm{tr(A)X^{n-1}} + ... + (-1)^{\mathrm{n}}\mathrm{det(A)} = \prod_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X} - \lambda_{\mathrm{k}})$

Théorème 2.2.40 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in Sp(A)$ avec $mul(\lambda) = m$.*
Alors $1 \leqslant \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{m}$

Pour le démontrer, on va travailler sur les endomorphismes. Soit E ev de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = A$. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $E_\lambda(u)$, avec $dim(E_u) = k$, qu'on complète pour former une base $\mathcal{B}'$ de E. Alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(u) =$
$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 & B \\ 0 & 0 & \lambda & \\ \hline & 0 & & C \end{array}\right)$ donc $\chi_u = (X-\lambda)^k \chi_C$ et donc $(X-\lambda)^k$ divise χ_u d'où $k \leqslant m$

Théorème 2.2.41 *Cas particuliers*
- *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec χ_A scindé et à racines simples. Alors A est semblable à une matrice diagonale*
- *$dim(E) = n$, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé et à racines simples, alors il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.*

Se démontre à l'aide de 2.1.3

2.3 Diagonalisation : on suppose dans la suite que E est de dimension finie

2.3.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 2.3.1 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dira que u est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.*

Une telle base est constituée de vecteurs propres car si $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ alors $\forall k,\ u(e_k) = a_k e_k$ où e_k est le k^{ime} vecteur de $\mathcal{B}$, donc non nul. C'est un vecteur propre.

Théorème 2.3.2 *Soit $u \in L(E)$. u est diagonalisable $\iff$ E est somme directe de ses sev propres.*

car ...

Exemple 2.3.3 *Cas des projections : une projection est diagonalisable.*

Soit p une projection sur F de direction G. On sait que F et G sont supplémentaires $F \oplus G = E$. $\forall x \in F,\ p(x) = x$ donc les vecteurs de F sont des vecteurs propres. De même $\forall x \in G,\ p(x) = 0$, les vecteurs de G sont aussi des vecteurs propres. Si on note $\mathcal{B}_1$ une base de F et $\mathcal{B}_2$ une base de G, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E et $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right)$, p est donc diagonalisable (on verra plus tard une autre démonstration du fait qu'une projection est un endomorphisme diagonalisable).

Exemple 2.3.4 *Cas des symétries : une symétrie est diagonalisable et il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de la symétrie est du type* $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$

À vous de le faire ...

2.3.2 Matrice diagonalisable

Définition 2.3.5 *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dira que A est **diagonalisable** $\iff$ A est semblable à une matrice diagonale, i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\exists D$ diagonale tq , $D = P^{-1}AP$*

Proposition 2.3.6 *A est diagonalisable si et seulement tout endomorphisme u dont la matrice est A dans une base $\mathcal{B}$ est diagonalisable*

Oui

Exemple 2.3.7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

1. *Déterminer χ_A et vérifier que $\chi_A = (X+1)(X-1)(X-2)$*
2. *En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.*
3. *Montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$*

Exemple 2.3.8 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer χ_A sous forme factorisée.*
2. *Déterminer les sev propres de A.*
3. *A est-elle diagonalisable ?*

Exemple 2.3.9 *Soit* $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer χ_B sous forme factorisée.*
2. *B est-elle diagonalisable ?*
3. *Comparer avec 2.3.8*

2.3.3 Premiers critères de diagonalisation

Théorème 2.3.10 *Soit E un ev tel que $dim(E) = n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$*
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *u est diagonalisable*

2. *Il existe une base de E composée uniquement de vecteurs propres de u ;*
3. *E est somme directe de ses sev propres*
4. *χ_u est scindé et $\forall \lambda \in Sp(u),\ dim(E_\lambda(u)) = mul(\lambda)$*

Car : 1 $\iff$ 2 c'est la définition : les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans laquelle u est diagonale sont des vecteurs propres
1 $\iff$ 3 c'est le théorème 2.3.2
1 $\iff$ 4 car ...

On peut retrouver le théorème suivant :

Théorème 2.3.11 *χ_u est scindé et χ_u à racines simples $\Longrightarrow$ u est diagonalisable*

car si χ_u est à racines simples, alors les valeurs propres sont de multiplicité 1 et donc la dimension des sev propres étant comprise entre 1 et la multiplicité, la dimension des sev propres est égale 1, c'est à dire à la multiplicité des valeurs propres. On utilise alors le critère 4.

Remarque 2.3.12 *Ce théorème est une autre manière d'écrire le théorème 2.2.41*

Remarque 2.3.13 ***ATTENTION La réciproque est fausse. il ne s'agit là que d'une implication***

Donner un exemple d'endomorphisme diagonalisable dont le polynôme caractéristique n'est pas à racines simples.

Exemple 2.3.14 *Reprendre l'exemple 2.3.9*

On voit donc qu'il est essentiel de connaître la dimension des sev propres. Pour cela on dispose du

Théorème 2.3.15 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in Sp(A)$. Alors* $\mathrm{dim}\,(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})) = \mathrm{n} - \mathrm{rg}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})$

C'est clair : c'est le théorème du rang. Mais c'est très pratique.

Exemple 2.3.16 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *Montrons avec le minimum de calculs que A est diagonalisable.*
$rg(A) = 1$ donc 0 est valeur propre de A et $\mathrm{dim}\,\mathrm{E}_0(\mathrm{A}) = 2$. A possède 3 valeurs propres comptées avec leur multiplicité : 0, 0, λ. De plus $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 3 = 0 + 0 + \lambda$. Donc $Sp(A) = \{0, 3\}$. On sait que 0 est valeur propre double, donc 3 est valeur propre simple, donc $1 \leqslant \mathrm{dim}\,\mathrm{E}_3(\mathrm{A}) \leqslant 1$, i.e. $\mathrm{dim}\,\mathrm{E}_3(\mathrm{A}) = 1$ et finalement A est diagonalisable.

Exemple 2.3.17 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Il est clair que $Sp(A) = \{2\}$.*
$\mathrm{dim}\,\mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = 3 - \mathrm{rg}\,(\mathrm{A} - 2\mathrm{I})$. *Or* $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *qui est de rang 1, donc*
$\mathrm{dim}\,\mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = 3 - 1 = 2$.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

2.4 Trigonalisation

2.4.1 Trigonalisation

Rappel
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire alors les valeurs propres de A sont ses éléments diagonaux et $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - a_{k,k})$. Voir 2.2.34

Définition 2.4.1 *$dim(E) = n,\ u \in \mathcal{L}(E)$*
*On dira que u est **trigonalisable** si et seulement si il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure*

Définition 2.4.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dira que A est trigonalisable si et seulement si A est semblable à une matrice triangulaire supérieur*

Théorème 2.4.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

$$\begin{aligned} A \text{ est trigonalisable} &\iff A \text{ est la matrice d'un endomorphisme trigonalisable} \\ &\iff \text{l'endomorphisme canoniquement associé à } A \text{ est trigonalisable} \end{aligned}$$

Proposition 2.4.4 *u diagonalisable $\Longrightarrow$ u est trigonalisable*

clair ...

Théorème 2.4.5 *Une matrice/un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé*

car ...

Conséquence 2.4.6 *Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel est trigonalisable*
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable

Car tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé, et donc χ_u et χ_A sont scindés sur $\mathbb{C}$

Proposition 2.4.7 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est trigonalisable, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité*

clair car $\chi_A = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ où les λ_k sont les valeurs propres comptées avec leur multiplicité.
Soit $T = (t_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ triangulaire supérieure semblable à A. Alors $\chi_A = \chi_T$ et donc les racines de χ_T sont les λ_k, mais T étant triangulaire, les racines de χ_T sont les $t_{k,k}$. Donc les éléments diagonaux de T sont bien les valeurs propres de A.

Conséquence 2.4.8 *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que χ_u scindé, alors $\mathrm{tr(u)} = \sum \mathrm{\lambda_k}$ et $\mathrm{det(u)} = \prod \mathrm{\lambda_k}$ où les λ_k sont les valeurs propres de u comptées avec leur multiplicité.*
Bien entendu, il y a la même conséquence pour les matrices.

2.4.2 Application : Détermination de la valeur propre de plus grand module (méthode des traces)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que A est semblable à une matrice T triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.
On suppose les valeurs propres rangées dans le sens des modules décroissants et on suppose en outre que **la valeur propre de plus grand module est unique**, i.e. si $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ on a classé les valeurs propres en sorte que $|\lambda_p| \leqslant ... \leqslant |\lambda_2| < |\lambda_1|$. Notons alors $m = mul(\lambda_1)$.

alors $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1^k & & & \\ & & & \lambda_2^k & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_p^k \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathrm{tr(T^k)} = \sum\limits_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{p}} \mathrm{\lambda_k^k.mul(\lambda_j^k)}$ et donc $\mathrm{tr(A^k)} = \sum\limits_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{p}} \mathrm{\lambda_j^k.mul(\lambda_j)}$

On suppose enfin que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{tr(A^k)} \neq 0$
Pour $r \geqslant 2,\ \lambda_r^k = o_{k \to +\infty}(\lambda_1^k)$ donc $\dfrac{\mathrm{tr(A^{k+1})}}{\mathrm{tr(A^k)}} \sim \dfrac{m\lambda_1^{k+1}}{m\lambda_1^k} \sim \lambda_1$.
Et donc, on obtient assez simplement à l'aide de Python une approximation de la valeur de $\lambda_1 = \lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{\mathrm{tr(A^{k+1})}}{\mathrm{tr(A^k)}}$

2.5 Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

2.5.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.5.1 *Soit* $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$

1. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On notera* $P(u)$ *l'endomorphisme de* E *défini par* $P(u) = a_0id_E + a_1u + a_2u^2 + ... + a_nu^n$
2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On notera* $P(A)$ *la matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *définie par* $P(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + ... + a_nA^n$

Remarque 2.5.2 *Ne pas oublier* id_E *dans* $P(u)$, *ni* I_n *dans* $P(A)$
Exemple : si $P = 2 + X - 3X^2$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$, *alors* $P(u) =$

Proposition 2.5.3 $\mathrm{dim\,(E) = n}, \mathcal{B}$ *une base de* E, $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ *alors* $P(A) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(P(u))$

Car ...

Théorème 2.5.4 *Sot* $u \in \mathcal{L}(E)$
L'application $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ *définie par* $P \to P(u)$ *est un morphisme d'algèbres i.e.*

- $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ (\alpha P + \beta Q)(u) = \alpha P(u) + \beta Q(u)$
- $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$
- $1_{\mathbb{K}[X]}(u) = id_E$

car ...

Conséquence 2.5.5 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$
$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X],\ P(u)$ *et* $Q(u)$ *commutent et donc,* $\forall P \in \mathbb{K}[X],\ P(u)$ *et* u *commutent*

Clair, car $PQ = QP$ de même que $XP = PX$ (on peut aussi le prouver directement)

Conséquence 2.5.6 $\ker(P(u))$ *et* $Im(P(u))$ *sont stables par* u.

Voir 2.1.4

Définition 2.5.7 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$
On appelle ***polynôme annulateur de*** u *tout polynôme* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $P(u) = 0$.
Les polynômes annulateurs de u *sont les éléments de* $\ker(\varphi) = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(u) = 0\}$.

Proposition 2.5.8 $\ker(\varphi)$ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$.

car on sait que le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

Définition 2.5.9 $Im(\varphi) = \{P(u) / P \in \mathbb{K}[X]\}$ *est notée* $\mathbb{K}[u]$

On sait que les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont les $D.\mathbb{K}[X]$. On en déduit la définition :

Définition 2.5.10 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *On appelle* ***polynôme minimal de*** u *l'unique polynôme noté* Π_u *s'il existe tel que :*

$$\begin{cases} \Pi_u(u) = 0 \\ \forall Q \in \mathbb{K}[X], Q(u) = 0 \Longrightarrow \Pi_u \text{ divise } Q \\ \Pi_u \text{ unitaire.} \end{cases}$$

Proposition 2.5.11 π_u *existe* $\iff$ $Ker(\varphi) \neq \{0\}$ *i.e. il existe un polynôme annulateur non nul.*

Remarque 2.5.12 *Le polynôme minimal, s'il existe, n'est jamais nul*

Proposition 2.5.13 *Le polynôme minimal, s'il existe est un polynôme annulateur. C'est le polynôme annulateur unitaire de plus petit degré.*

car ...

Remarque 2.5.14 *On a les mêmes définitions concernant les matrices : polynôme annulateur d'une matrice, noyau de* φ, *polynôme minimal d'une matrice.*

Exemple 2.5.15 $E = F \oplus G$ *avec* $F \neq \{0\}$ *et* $G \neq \{0\}$. *Soit* f *la projection sur* F *de direction* G.
- *Donner un polynôme annulateur de* f.
- *Donner le polynôme minimal de* f

Exemple 2.5.16 *Reprendre l'exemple du dessus dans le cas d'une symétrie par rapport à* F *de direction* G.

Exemple 2.5.17 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.
Montrer que le polynôme minimal de A *est* $\Pi_A = X^2 - 5X + 6$.

Théorème 2.5.18 *E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.*
u possède alors un polynôme annulateur non nul, et donc possède un polynôme minimal.

Car $dim(E) = n \Longrightarrow \dim(\mathcal{L}(\mathrm{E})) = \mathrm{n}^2$, la famille $(id, u, u^2, ..., u^{n^2})$ qui est une famille de $n^2 + 1$ éléments dans un espace de dimension n^2 est donc une famille liée. Donc il existe $a_0, ..., a_{n^2}$ non tous nuls tels que $a_0 id + a_1 u + ... + a_{n^2} u_{n^2} = 0$. Le polynôme $P = a_0 + a_1 X + ... + a_{n^2} X^{n^2}$ annule donc u.

Conséquence 2.5.19 *Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet un polynôme minimal.*

Théorème 2.5.20 *Si Π_u existe, notons $d = deg(\Pi_u)$. Alors la famille $\{id, u, .., u^{d-1}\}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$*

car ...

Exemple 2.5.21 *Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.*

1. *Montrer que $\Pi_A = X^2 - 3X + 2$.*
2. *Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^{12} par Π_A.*
3. *En déduire une expression simple de A^{12} en fonction de I et A.*

2.5.2 Polynômes et éléments propres

Théorème 2.5.22 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$*

1. *λ valeur propre de $u \Longrightarrow P(\lambda)$ valeur propre de $P(u)$, et x vecteur propre de u associé à $\lambda \Longrightarrow x$ vecteur propre de $P(u)$ associé à $P(\lambda)$.*
2. *Si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P,*
   i.e. $Sp(u) \subset \{$ racines de $P\}$

Ce théorème se transpose pour les matrices.

Car ...
ATTENTION : L'inclusion dans le second point du théorème 2.5.22 peut être une inclusion stricte.

Exemple 2.5.23 *$P = X^2 - X$ annule id_E. 0 est racine de P, mais 0 n'est pas valeur propre de id_E*

Théorème 2.5.24 *Si Π_u est le polynôme minimal de u alors les valeurs propres de u sont exactement les racines de Π_u*

car ...

Conséquence 2.5.25 *Π_u et χ_u ont exactement les mêmes racines ; ce qui peut les différencier c'est l'ordre de multiplicité de ces racines.*

ATTENTION : il n'y a pas de lien entre l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ et l'ordre de multiplicité de λ racine de Π_u. Pour nous en convaincre, voici quelques exemples :

Exemple 2.5.26 1. *$A = I_n$, alors $\Pi_A = X - 1$. 1 est valeur propre de multiplicité n, mais 1 est racine simple de Π_A.*

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *1 est valeur propre de B de multiplicité 2. Montrer que $\Pi_B = (X-1)^2$.*
   Alors dans ce cas, la multiplicité de 1 en tant que valeur propre et en tant que racine du polynôme minimal est ici la même.
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *1 est valeur propre de multiplicité 3. Montrer que $\Pi_C = (X-1)^2$.*
   Ici encore la multiplicité de la valeur propre 1 est différente de la multiplicité de 1 en tant que racine de Π_C.

2.5.3 Théorème de Cayley Hamilton

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Le calcul donne $\chi_A = X^2 - 3X + 2$.
Calculer $\chi_A(A)$.

Théorème 2.5.27 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. *Alors $\chi_u(u) = 0$.*
*i.e. Le polynôme caractéristique de u est **un** polynôme annulateur de u.*
De même $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow \chi_A(A) = 0$

Démonstration non exigible.

Conséquence 2.5.28 $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. $\mathrm{u} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \Longrightarrow \Pi_{\mathrm{u}}$ *divise* χ_u.

Conséquence 2.5.29 $\deg(\Pi_u) \leqslant \dim \mathrm{E}$

Exemple 2.5.30 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Donner un polynôme annulateur de A.*
2. *Donner* $\dim \ker(\mathrm{A} - 2\mathrm{I})$
3. *Le polynôme $(X-1)(X-2)$ est-il un polynôme annulateur de A ?*

2.5.4 Théorème de décomposition des noyaux

Lemme 2.5.31 *Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*
Alors $\ker((PQ)(u)) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$

Car ... Conséquence :

Théorème 2.5.32 ***Théorème de décomposition des noyaux**. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(P_k)_{k \in [\![1,r]\!]}$ une famille de polynômes premiers entre eux 2 à 2.*
Alors : $\ker\left(\left(\prod_{k=1}^{r} P_k\right)(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker P_k(u)$

Par récurrence sur r.

Conséquence 2.5.33 *$u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \prod_{k=1}^{r} P_k$ où les P_k sont des polynômes premiers entre eux deux à deux.*
P annule $u \Longrightarrow E = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker(P_k(u))$

car $\ker P(u) = E$.

Théorème 2.5.34 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$.
On suppose χ_u *scindé sur* $\mathbb{K}[X]$: $\chi_u = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ *où les* λ_k *sont distincts deux à deux.*
Alors $E = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker((u - \lambda_k id)^{\alpha_k})$.

car $\chi_u(u) = 0$ par Cayley Hamilton, et $\forall j, k,\ \ \text{tq } j \neq k,\ (X - \lambda_j)^{\alpha_j} \wedge (X - \lambda_k)^{\alpha_k} = 1$. Il suffit ensuite d'utiliser le théorème de décomposition des noyaux

2.5.5 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Théorème 2.5.35 *$dim(E) = n$. $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule u.*

car ...

Exemple 2.5.36
1. *Une projection annule $X^2 - X = X(X - 1)$ qui est scindé à racines simples, donc une projection est diagonalisable.*
2. *Une symétrie est diagonalisable : dites pourquoi*
3. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = id$. u est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?*

Conséquence 2.5.37 *Le polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable u est* $\Pi_u = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)$ *où $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ avec les λ_k sont distincts 2 à 2.*

Théorème 2.5.38 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim \mathrm{E} = \mathrm{n}$.
u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples

car ...

Exemple 2.5.39 *Reprendre l'exemple 2.5.30 et en particulier la question 3*

2.5.6 Cas d'un endomorphisme induit

Théorème 2.5.40 *Soit $u \in L(E)$ et F un sev stable de E stable par u. Alors*
1. $\Pi_{u_{|F}}$ *divise* Π_u
2. *u diagonalisable $\Longrightarrow$ $u_{|F}$ diagonalisable.*

car ...

2.5.7 Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes

Définition 2.5.41 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. *On dira que u est* ***nilpotent*** *si et seulement si $\exists p \in \mathbb{N},\ u^p = 0$ (on rappelle que $u^0 = id$)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. on dira que A est nilpotente si et seulement si $\exists p \in \mathbb{N},\ A^p = 0$.
On appelle ***indice de nilpotence*** *de u (resp A) le plus petit entier naturel p tel que $u^p = 0$ (resp $A^p = 0$).*
i.e. l'entier p s'il existe tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$

Remarque 2.5.42 *Tous les endomorphismes ne sont pas nilpotents : par exemple* id_E *n'est pas nilpotent*

Exemple 2.5.43 *Dans* $\mathbb{K}_n[X]$ $D : P \to P'$ *est nilpotent d'indice* $n+1$

Proposition 2.5.44 $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. u *est nilpotent* $\Longrightarrow u$ *n'est pas inversible*

car ...

Proposition 2.5.45 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. u *est nilpotent* $\iff \chi_u = X^n$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A *est nilpotente* $\iff \chi_A = X^n$.

car ...

Conséquence 2.5.46 $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. u *est nilpotent* $\Longrightarrow u$ *est trigonalisable et* $Sp(u) = \{0\}$

car ...

Conséquence 2.5.47 $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$. u *est nilpotent* $\Longrightarrow$ *son indice de nilpotence est inférieur à* $\dim(\mathrm{E})$.

Conséquence 2.5.48 $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$.
u *est nilpotent et* u *diagonalisable* $\Longrightarrow u = 0$. *En d'autres termes, mis à part l'endomorphisme nul aucun endomorphisme nilpotent n'est diagonalisable.*

car ...

EXERCICE à savoir résoudre :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent d'indice p.
Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Justifier l'existence de x.
Montrer que $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est libre.

2.5.8 Endomorphismes à polynôme annulateur scindé

On a vu dans le théorème 2.4.5 que si χ_u est scindé alors u est trigonalisable.
On peut améliorer ce théorème.

Théorème 2.5.49 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $\dim(\mathrm{E}) = \mathrm{n}$.
u *est trigonalisable* $\iff \exists P$ *polynôme scindé et annulateur de* u

car : le sens direct c'est le théorème 2.4.5
Le sens réciproque : P annulateur est scindé $\Longrightarrow \Pi_u$ est scindé, donc χ_u scindé et là encore le théorème 2.4.5 permet de conclure.

Théorème 2.5.50 *S'il existe un polynôme scindé annulant u, alors E se décompose en somme directe de sev stables par u et sur chacun de ces sev stables, la restriction de u est la somme d'une homothétie vectorielle et d'un endomorphisme nilpotent.*

Car ...

Traduction matricielle : s'il existe un polynôme scindé $P = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ annulant u, alors il existe une base de E telle que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$

avec $A_k - \lambda_k I$ nilpotent d'indice inférieur ou égal à α_k

2.6 Quelques applications

2.6.1 Puissances de matrices ou d'endomorphismes

2.6.1.1 cas où A est diagonaliable

Alors $\exists D$ diagonale, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $D = P^{-1}AP$ et donc $A = PDP^{-1}$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$ et D^n est la matrice diagonale déduite de D en élevant à la puissance n tous les éléments diagonaux de D.
De plus, si A est inversible, i.e. $0 \notin Sp(A)$ alors $\forall n \in \mathbb{Z},\ A^n = PD^nP^{-1}$

Exemple 2.6.1 $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}$. *Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

2.6.1.2 Cas où A quelconque

Si on connaît un polynôme P annulateur de A, on peut diviser X^n par P : $X^n = QP + R_n$ avec $\deg(R_n) < \deg(P)$.
Alors $A^n = Q(A)P(A) + R_n(A) = R_n(A)$.
Ainsi, si $\deg(P) = r$, A^n peut s'écrire : $A^n = a_{n,0}I + a_{n,1}A + ... + a_{n,r-1}A^{r-1}$

Exemple 2.6.2 *Voir l'exemple*

2.6.2 Suites récurrentes linéaires

2.6.2.1 Généralités

Définition 2.6.3 *Une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre p à coefficients constants si et seulement si*

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{K} \text{ avec } \alpha_p \neq 0 \text{ tq } \forall n \geqslant p,\ u_n = \alpha_1 u_{n-1} + \alpha_2 u_{n-2} + ... + \alpha_p u_{n-p} \qquad (*)$$

Théorème 2.6.4 *L'ensemble des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $(*)$ avec $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{K}$ fixés et $\alpha_p \neq 0$, est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension p*

Car ...

2.6.2.2 Cas particulier des suites d'ordre 2

Soit α_1, α_2 des scalaires fixés avec $\alpha_2 \neq 0$.
Notons $H = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \forall n \geqslant 2,\ u_n = \alpha_1 u_{n-1} + \alpha_2 u_{n-2}\}$
Pour $u \in H$ notons $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. alors $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$
2. Cette matrice étant obtenue, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^nU_0$.
   Le problème revient donc à calculer A^n, ce qu'on sait faire.
3. Déterminer χ_A.
4. Cas particulier où χ_A a deux racines distinctes r_1 et r_2. Que dire de U_n. Comparer avec le résultat démontré en Mpsi concernant la suite u_n.
5. Cas où χ_A a une racine double : refaire la même étude.

6. Comment cette méthode pourrait-elle être utilisée pour les suites récurrentes d'ordre 3 ou plus ?

Résumé trés succint :

1. Pour voir si u est diagonalisable :
   - Si χ_u n'est pas scindé, u n'est PAS diagonalisable
   - Sit χ_u est scindé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
     - Si χ_u est à racines simples, alors u diagonalisable
     - Si χ_u n'est pas à racines simples, il faut comparer, pour tout k, $\dim \mathrm{E}_{\lambda_k}(\mathrm{u})$ et $mul(\lambda_k)$. u est diagonalisable si pour tout k il y a égalité.
   - Si u annule un polynôme scindé à racines simples, alors u diagonalisable
   - autre ...
2. Concernant les polynômes annulateurs : P annulateur de u ssi $P(u) = 0$
   - χ_u est annulateur (Cayley Hamilton)
   - Le polynôme minimal Π_u est
     - annulateur
     - annulateur de degré minimal (et unitaire)
     - divise tout polynôme annulateur de u, et en particulier χ_u