Chapitre 9

Séries entières

9.1 Introduction et convergence

9.1.1 Définitions

Définition 9.1.1 *On appelle série entière toute série de fonctions de terme général* $a_n z^n$ *avec* $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $z \in \mathbb{C}$.
a_0 *est appelé terme constant de la série*
a_n *est appelé coefficient d'ordre* n
Si on restreint la série à $z \in \mathbb{R}$, *alors on la notera plutôt* $\sum a_n x^n$ *ou* $\sum a_n t^n$ *...*

Remarque 9.1.2 *Les sommes partielles d'une série entière sont des polynômes (fonctions polynomiales)*

Remarque 9.1.3 *Si on note* S_n *le polynôme* $S_n = \sum_0^n a_k X^k$, *alors* $S_n = S_{n-1} + a_n X^n$

Exemple 9.1.4

— $\sum \frac{z^n}{n!}$ *est une série entière, dont la somme est* e^z.
— $\sum z^n$ *est une série entière, dont la somme pour* $|z| < 1$ *est égale à* $\frac{1}{1-z}$
— $\sum b_n z^{2n}$ *est aussi une série entière, car elle peut s'écrire* $\sum_n a_n z^n$ *avec* $a_{2n} = b_n$ *et* $a_{2n+1} = 0$
— *Tout polynôme en* z *est une série entière, dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang (quel est ce rang ?)*
$1 + 3z - 5z^3$ *est la série* $\sum a_n z^n$ *où* $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 0$, $a_3 = -5$ *et* $\forall n \geqslant 4, a_n = 0$

9.1.2 Lemme d'Abel

Théorème 9.1.5 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière.*
S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ *tel que la suite* $(a_n z_0^n)_n$ *est bornée, alors*
$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < |z_0| \Longrightarrow \sum a_n z^n$ *converge absolument.*

Car ...

Conséquence 9.1.6 — *S'il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la série* $\sum a_n z_0^n$ *converge, alors* $\forall z,\ |z| < |z_0| \Longrightarrow \sum a_n z^n$ *CVA.*

— *S'il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que la série* $\sum a_n z_0^n$ *diverge, alors* $\forall z,\ |z| > |z_0| \Longrightarrow \sum a_n z^n$ *DV.*

car ...

Cas particulier 9.1.7 .
Dans le cas d'une série réelle, $\sum a_n x_0^n$ *converge* $\Longrightarrow \forall x \in]-|x_0|, |x_0|[,\ \sum a_n x^n$ *CV*

9.2 Rayon de convergence

9.2.1 Rayon de convergence

Définition-théorème 9.2.1 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière.*
On appelle rayon de convergence de cette série le nombre $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *défini par :*

$$R = Sup\,\{r \in \mathbb{R}_+ / \text{ la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée } \}$$

Alors $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ *converge absolument*
$\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ *diverge grossièrement*

car ...

Remarque 9.2.2 *Si* $\sum a_n z_0^n$ *converge, alors* $R \geqslant |z_0|$

car alors, la suite $(a_n z_0^n)$ converge vers 0, donc est bornée.

Remarque 9.2.3 *Toute série entière possède un rayon de convergence.*

Exemple 9.2.4 — *Montrons que le rayon de convergence de la série* $\sum \frac{z^n}{n!}$ *est* $+\infty$

— *Quel est le rayon de convergence de la série entière* $\sum z^n$ *?*

— *Montrons que le rayon de convergence de la série* $\sum n! z^n$ *est 0*

— *Montrons que le rayon de convergence de la série* $\sum n z^n$ *est 1.*

— *Déterminons le rayon de convergence de la série* $\sum (2 + (-1)^n) z^n$

— *On a vu qu'un polynôme peut être regardé comme une série entière. Quel est alors son rayon de convergence ?*

Corollaire 9.2.5 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence R.*

— *La suite* $(a_n z_0^n)_n$ *est bornée* $\Longrightarrow R \geqslant |z_0|$.

— $\sum a_n z_0^n$ *ne converge pas absolument* $\Longrightarrow R \leqslant |z_0|$

Exemple 9.2.6 *Considérons la série* $\sum \sin(n) z^n$.

— *Pour* $|z| = 1$ *alors la suite* $(\sin(n) z^n)_n$ *est bornée, donc* $R \geqslant 1$.

— *Pour $z = 1$ la série $\sum \sin(n) z^n$ c'est à dire la série $\sum \sin(n)$ diverge : en effet la suite $(\sin(n))_n$ ne tend pas vers 0.*
Car supposons que $\sin(n) \to 0$ alors vu que $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \sin(1)\cos(n)$, on déduit que la suite $(\cos(n))_n$ tend vers 0. Montrer alors la contradiction.
Finalement le rayon de convergence de la série $\sum \sin(n) z^n$ est $R = 1$.

Remarque 9.2.7 *Dans la définition du rayon de convergence, le théorème nous renseigne sur les z tel que $|z| \neq R$ (il y a des inégalités strictes). Le théorème ne nous renseigne pas sur le comportement de la série en z lorsque $|z| = R$.*

Définition 9.2.8 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. On appelle somme de la série l'application*

$$S : \begin{cases} B(0,R) & \to \mathbb{C} \\ z & \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$$

9.2.2 Disque ouvert de convergence

Définition 9.2.9 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

— *On appelle disque ouvert de convergence l'ensemble $B(0,R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$*
Dans le cas réel, on parlera d'intervalle ouvert de convergence : $]-R, R[$.
$\forall z \in B(0,R), \sum a_n z^n$ converge absolument et $\forall z,\ |z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge

— *Lorsque $R \in \mathbb{R}_+^*$ i.e. ($0 < R < +\infty$), l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / |z| = R\}$ est appelé cercle d'incertitude, car le théorème 9.2.1 ne donne pas d'information sur la nature de la série pour $|z| = R$.*

Exemple 9.2.10 *Étudions le comportement des séries $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ sur le cercle d'incertitude (on notera R le rayon de convergence).*

— *Cas de la série $\sum z^n$: on sait que cette série converge si et seulement si $|z| < 1$. Donc $R = 1$ et la série diverge en tout point du cercle d'incertitude*

— *Cas de la série $\sum \frac{z^n}{n^2}$: déterminer R, et étudier son comportement sur le cercle d'incertitude.*

— *Cas de la série $\sum \frac{z^n}{n}$: déterminer R. Étudier le comportement de cette série pour $z = 1$ puis pour $z = -1$. (on peut démontrer mais c'est plus difficile que cette série converge sur le cercle d'incertitude, sauf pour $z = 1$).*

Théorème 9.2.11 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

— *La série converge normalement sur tout disque **fermé inclus** dans le disque ouvert de convergence : i.e. $\forall r,\ 0 < r < R \Longrightarrow \sum a_n z^n$ CVN sur $B_f(0,r)$.*

— *La série DV Grossièrement pour tout z tel que $|z| > R$.*

Car ...

Remarque 9.2.12 ***ATTENTION*** *: la fait que la série CVN sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence n'implique pas qu'elle convergerait normalement sur le disque ouvert de convergence : par exemple la série $\sum z^n$ ne CV pas normalement sur $B(0,1)$ (rappeler comment on le montre)*

Conséquence 9.2.13 *La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.*

Car ...

9.2.3 Détermination du rayon de convergence

Règles de comparaison.
Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Proposition 9.2.14 *Si* $\forall n,\ |a_n| \leqslant |b_n|$ *alors* $R_a \geqslant R_b$, *et plus généralement, s'il existe* $C > 0$ *tel que* $\forall n,\ |a_n| \leqslant C\,|b_n|$ *alors* $R_a \geqslant R_b$.

car ...

Proposition 9.2.15 *Si* $a_n = O(b_n)$ *alors* $R_a \geqslant R_b$.
En particulier, $a_n = o(b_n) \Longrightarrow R_a \geqslant R_b$

car ...

Proposition 9.2.16 *Si* $|a_n| \sim |b_n|$ *alors* $R_a = R_b$.

car ...

Proposition 9.2.17 *Les séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum n a_n z^n$ *ont même rayon de convergence*

car ...

Exemple 9.2.18 *Déterminons les rayons de convergence des séries :*
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) z^n$
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) z^n$
- $\displaystyle\sum (n+(-1)^n) z^n$

Utilisation de la règle de D'Alembert

Théorème 9.2.19 ***Rappel du théorème de D'Alembert pour les séries positives :***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes strictement positifs telle que* $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \geqslant 0$
- $\ell < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ *CV*
- $\ell > 1 \Longrightarrow \sum u_n$ *Diverge Grossièrement.*

Appliquons ce théorème aux séries entières :

Théorème 9.2.20 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière telle que*
$\exists N, \forall n \geqslant N,\ a_n \neq 0$ *et* $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$
alors le rayon R *de cette série est* $R = \dfrac{1}{\ell}$ *avec la convention* $\dfrac{1}{0} = +\infty$ *et* $\dfrac{1}{+\infty} = 0$

car ...

Exemple 9.2.21 — *Déterminer le rayon R de la série* $\sum \frac{n^5+4n^3-27n+12}{n^4+6n^2-93} z^n$

— *Plus généralement : soit P, Q des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls. Montrer que le rayon de convergence de la série* $\sum \frac{P(n)}{Q(n)} z^n$ *est égal à 1.*

— *Déterminer le rayon de convergence de la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{3^n}$

Remarque 9.2.22 ***ATTENTION*** *à ne pas faire dire à ce théorème plus qu'il n'en dit :*

— *Ce théorème nous renseigne dans le cas où* $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *existe. Si cette limite n'existe pas, la série entière a quand même un rayon de convergence, mais on ne pourra pas l'obtenir par D'Alembert. (voir par exemple 9.2.6)*

— *Le fait qu'on connaisse le rayon R de la série ne signifie pas que* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *aurait pour limite* $\frac{1}{R}$ *(voir le même exemple)*

— *Ne pas appliquer ce théorème aux séries du type* $\sum a_n z^{2n}$ *ou* $\sum a_n z^{3n+1}$ *ou ...*
En effet ce sont certes des séries entières $\sum \alpha_n z^n$ *mais avec des α_n qui s'annulent une infinité de fois. Par exemple* $\sum a_n z^{2n}$ *est la série entière* $\sum \alpha_n z^n$ *où α_n est nul si n est impair et $\alpha_{2n} = a_n$. La première hypothèse du théorème n'est donc pas satisfaite.*

Exemple 9.2.23 *Quel est le rayon de la série entière* $\sum 3^n z^{2n}$ *?*

9.2.4 Rayon de convergence et opérations algébriques

Définition 9.2.24 ***Opérations algébriques formelles***
Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières. On définit de façon formelle*

— *la somme de ces deux séries entières comme étant la série* $\sum (a_n + b_n) z^n$

— *le produit de la série* $\sum a_n z^n$ *par le scalaire λ comme étant la série* $\sum (\lambda a_n) z^n$

— *le produit de Cauchy de ces deux séries comme étant la série entière*
$$\sum_n \left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}\right) z^n = \sum_n \left(\sum_{q=0}^{n} a_{n-q} b_q\right) z^n$$

Théorème 9.2.25 ***Sommes et combinaisons linéaires***
Soient $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Alors*

— $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, *la série* $\sum (\lambda a_n) z^n$ *a même rayon de convergence que* $\sum a_n z^n$.

— *La série somme* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *a pour rayon de convergence R_c qui vérifie $R_c \geqslant min(R_a, R_b)$. De plus,*
  — $R_a \neq R_b \Longrightarrow R_c = min(R_a, R_b)$
  — *Si $R_a = R_b$ il est possible que $R_c > R_a = min(R_a, R_b)$*

et $\forall z < min(R_a, R_b), \sum_0^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

car ...

Exemple 9.2.26 — *$\sum z^n$ et $\sum \frac{1}{n} z^n$ ont pour rayon 1, et leur série somme $\sum (1+\frac{1}{n}) z^n$ a pour rayon 1 (à justifier)*

— *Quel est la rayon des deux séries $\sum \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}\right) z^n$ et $\sum \left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n!}\right) z^n$?*
Quel est le rayon de leur série somme ?

— *Quel est la rayon des deux séries $\sum z^n$ et $\sum \left(-1+\frac{1}{2^n}\right) z^n$?*
Quel est le rayon de leur série somme ?

Théorème 9.2.27 ***Produit de Cauchy***
Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
Alors la série produit $\sum_n \left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}\right) z^n$ a un rayon de convergence R_c qui vérifie $R_c \geqslant min(R_a, R_b)$.
Et $\forall z$ tel que $|z| < min(R_a, R_b)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

car ...

Remarque 9.2.28 *Contrairement à ce qui se passe pour les sommes de séries entières, on peut avoir $R_c > min(R_a, R_b)$ même si $R_a \neq R_b$.*

Exemple 9.2.29 *Prenons par exemple la série entière $\sum z^n$ de rayon 1 et la série entière $1-z$ (polynôme donc série entière) de rayon $+\infty$.*

— *Montrons que le produit de Cauchy de ces deux séries est la série constante égale à* 1
— *Donnons le rayon de cette série produit et comparer à $min(R_a, R_b)$*

9.3 Propriétés de la somme d'une série entière

9.3.1 Continuité

On a déjà rencontré le théorème

Théorème 9.3.1 *9.2.13 : La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.*
i.e. la fonction $z \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $B(0, R)$.

9.3.2 $DL_n(0)$ de la somme

Théorème 9.3.2 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme S.*
Alors pour tout entier p, la fonction S admet un $DL_p(0)$ obtenu en tronquant au rang p la série entière, i.e. :
$\forall z,\ |z| < R \Longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k + o(z^p)$.

car ...

Exemple 9.3.3 *On sait que* $\forall x \in \mathbb{R},\ exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ *on retrouve alors le* $DL_n(0)$ *de exp :*
$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$

Exemple 9.3.4 *On sait que* $\forall z,\ |z| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$. *Donner alors le* $DL_n(0)$ *de* $\frac{1}{1-z}$

Théorème 9.3.5 *Si* $\exists r > 0$ *tel que* $\forall z$ *tq* $|z| < r,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ *alors* $\forall n,\ a_n = b_n$

C'est simplement dû à un résultat de Mpsi : unicité d'un DL.

9.3.3 Dérivabilité de la somme

Théorème 9.3.6 *Soit* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *la somme d'une série entière de rayon* $R > 0$ $(x \in \mathbb{R})$.
alors

- *la fonction* S *est dérivable sur* $]-R, R[$ *et* $\forall x \in]-R, R[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$
- S *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R, R[$ *et*
  $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-R, R[,\ S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)...(n-p+1) a_n x^{n-p}$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$ *et donc,* $\forall x \in]-R, R[,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$

car ...

Exemple 9.3.7 *Soit* $\varphi : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. *Cette série entière est de rayon* $+\infty$, *donc* φ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \varphi(x)$.
Déterminer $\varphi(0)$.
Montrer que φ *est la fonction exp sur* $\mathbb{R}$ *(autre démonstration du résultat déjà établi en ...)*

9.3.4 Intégrabilité

Théorème 9.3.8 *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon* R *et de somme* S.
Alors $\forall x$ *tq* $|x| < R,\ \int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$
i.e. $\forall x$ *tq* $|x| < R,\ \int_0^x \left(\sum_0^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt$

car ...

Exemple 9.3.9 *On sait que* $\forall x \in \mathbb{R},\ (Arctan\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)}$.

$|x| < 1 \Longrightarrow \left|-x^2\right| < 1$ *et donc* $(Arctan\, x)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$.

Cette série entière est de rayon 1 (à justifier)

Alors, $\forall x, |x| < 1 \Longrightarrow Arctan\, x = \displaystyle\int_0^x (Arctan\, t)'dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n} dt$.

Donc $\forall x$ *tq* $|x| < 1,\ Arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

9.4 Fonctions développables en séries entières sur un intervalle

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$

9.4.1 Généralités

Définition 9.4.1 *Soit* $x_0 \in I$ *et* $f : I \to \mathbb{C}$.
On dira que f *est développable en série entière (centrée) en* x_0 *si et seulement si il existe une série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$ *et* $\exists \alpha > 0$ *tq*

$\forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$.

On utilisera l'abréviation f *est* $DSE(x_0)$ *pour dire* f *développable en série entière en* x_0. *On utilisera la même abréviation pour parler du développement en série entière de* f *en* x_0, *c'est à dire pour désigner la série entière.*

Remarque 9.4.2 *Comparons* R *et* α

Remarque 9.4.3 f *est* $DSE(x_0) \iff$ *la fonction* $h \to f(x_0+h)$ *est* $DSE(0)$
Par la suite on s'intéressera essentiellement aux $DSE(0)$.

Exemple 9.4.4 $f : x \to \dfrac{1}{1-x}$ *est* $DSE(0)$ *car* $\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Remarque 9.4.5 $f : x \to \dfrac{1}{1-x}$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ *mais l'écriture* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ *n'est valable que pour* $|x| < 1$

Exemple 9.4.6 *On a déjà rencontré d'autres fonctions* $DSE(0)$ *:*

- *exp qui est* $DSE(0)$ *sur* $\mathbb{R}$ *:* $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$
- *Arctan qui est* $DSE(0)$ *sur* $]-1, 1[$ *:* $\forall x \in]-1, 1[,\ Arctan\, x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Proposition 9.4.7 *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière à l'origine (en 0). Alors*

— $\exists \alpha > 0,\ f$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-\alpha, \alpha[$.

— $\forall x \in]-\alpha, \alpha[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Voir le théorème 9.3.6 ...

Exemple 9.4.8 *La fonction $x \to |x|$ n'est donc pas développable en série entière en 0.*

Définition 9.4.9 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ développable en série entière en 0. La série entière $\displaystyle\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelée série de Taylor (ou série de Mac Laurin) de f en 0*

Remarque 9.4.10 ***IMPORTANT*** *: dans la proposition ci-dessus, il ne s'agit pas d'une équivalence. Il existe des fonctions f $\mathcal{C}^\infty$ sur I, dont la série de Taylor a un rayon de convergence $R > 0$ mais dont la somme de la série de Taylor n'est pas égale à la fonction (sauf pour $x = 0$). voir l'exemple ci-dessous.*

Exemple 9.4.11 *Considérons $f : x \to e^{-1/x^2}$.*

— *Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, et que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.*

— *Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n}$.*

— *En déduire que $f(x) = o(x^n)$ et donc, que f admet pour tout n un $DL_n(0)$.*

— *Montrer $\exists (P_k)_k \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \neq 0,\ f^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}}$*

— *Déterminer une relation de récurrence sur les polynômes P_k et en déduire le degré d_k de P_k en fonction de k, ainsi que le coefficient dominant a_k de P_k.*

— *En déduire $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(x)$ a une limite finie à déterminer quand x tend vers 0. Qu'en conclure sur $f^{(k)}(0)$?*

— *En déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa série de Taylor en 0. Quel est le rayon de cette série de Taylor ?*

— *Quels sont les réels x tels que $f(x)$ est égal à la somme de sa série de Taylor en 0 ?*

Remarque 9.4.12 *Cette fonction possède pour tout entier n un $DL_n(0)$ mais elle n'est pas égale à la somme de sa série de Taylor (voir théorème 9.3.2)*

Proposition 9.4.13 *S'il existe, le développement en série entière centré en 0 est unique.*

car le théorème nous donne la valeur des coefficients

Proposition 9.4.14 *Soit f développable en série entière en 0 et $\sum a_n x^n$ sa série de Taylor.*

— f *paire* $\Longrightarrow \forall p,\ a_{2p+1} = 0$

— f *impaire* $\Longrightarrow \forall p,\ a_{2p} = 0$

Car (unicité du DSE(0)) ...

9.4.2 CNS pour que f soit développable en série entière en 0

Théorème 9.4.15 .

$$f \text{ développable en série entière en 0} \iff \left\{ \begin{array}{c} \exists \alpha > 0,\ f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-\alpha, \alpha[\\ \forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad \text{la suite } (R_n(x))_n \text{ définie par} \\ R_n(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \text{ CV vers } 0 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty. \end{array} \right.$$

car ...

Remarque 9.4.16 *La formule de Taylor avec reste intégrale donne :*
$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$

D'où une autre écriture de ce théorème.

Théorème 9.4.17 .

$$f \text{ développable en série entière en 0} \iff \begin{cases} \exists\alpha>0,\ f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-\alpha,\alpha[\\ \forall x\in]-\alpha,\alpha[,\quad \text{la suite } \left(\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ CV \text{ vers } 0 \end{cases}$$

C'est ainsi qu'on avait démontré dans l'exemple 7.3.17 que exp est développable en série entière en 0 (sans employer alors cette formulation)

9.4.3 Obtention de développements en séries entières

9.4.3.1 Opérations

Proposition 9.4.18 *Soient f,g des fonctions développables en séries entières en 0. alors, $f+g$, λf $(\lambda\in\mathbb{C})$, fg sont développables en séries entières en 0. Les séries entières sont obtenues par somme, produit par une constante, produit de cauchy des développements de f et de g en 0*

C'est clair : voir opérations sur les séries entières.

Ce théorème est peu utilisé dans la pratique pour obtenir le DSE(0) d'un produit de fonctions.

Proposition 9.4.19 *f développable en série entière en 0. Alors $\forall p\in\mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est développable en série entière en 0 et son dveloppement s'obtient en dérivant p fois celui de f.*

Clair

Proposition 9.4.20 *f développable en série entière en 0. Alors ses primitives sont développables en séries entières en 0, et leurs développements s'obtiennent en primitivant terme à terme le développement de f (attention aux constantes).*

Exemple 9.4.21 *Donner le DSE(0) des fonctions ch , sh,* cos *et* sin. .

Exemple 9.4.22 *$f:x\to\ln(1+x)$. On sait que $f(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}$.*
Or on connaît le développement de $x\to\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}$ sur $]-1,1[$.
Montrer que $\forall x\in]-1,1[,\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$
Montrer que cette série CVU sur $[0,1]$. En déduire $\forall x\in]-1,1],\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

Tout ceci suppose qu'on connaît parfaitement les développements en séries entières des fonctions usuelles, ainsi que leur rayon de convergence.

9.4.3.2 Utilisation d'une équation différentielle

Utilisable quand on sait que f est solution d'une équation différentielle à coefficients "simples" (par exemple, polynômes en x) et que f est l'unique solution de cette équation différentielle satisfaisant certaines conditions initiales ... On cherche une série entière solution de cette équation différentielle sur un intervalle J. Dans ce cas on pourra conclure que sur cet intervalle J f a pour développement la série entière obtenue.

Exemple 9.4.23 *Cherchons un DSE(0) de la fonction $f : x \to (1+x)^\alpha$. Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$ on sait faire (dire pourquoi ...)*
Plaçons nous dans le cas où $\alpha \notin \mathbb{N}$. f est définie sur $I =]-1, +\infty[$.

- *pour $x > 1$, exprimer $(1+x)f'(x)$ en fonction de $f(x)$ On en déduit que f est solution d'une équation différentielle linéaire (E) à donner.*
  f est donc l'unique solution de (E) satisfaisant $f(0) = 1$ (voir cours de Mpsi pour l'unicité).
- *Cherchons une solution de (E) sous forme de série entière. Posons donc $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ cette solution sur $]-R, R[$. Écrire $(1+x)S'(x) - \alpha S(x)$ sous forme d'une série entière. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)a_{n+1} + na_n - \alpha a_n)x^n = 0$*
- *En déduire une relation de récurrence liant les termes de la suite $(a_n)_n$, conjecturer alors l'expression de a_n en fonction de n et de a_0.*
- *Déterminer le rayon de convergence de cette série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et conclure sur le DSE(0) de $(1+x)^\alpha$*

9.4.3.3 Cas des fractions rationnelles

Remarque 9.4.24 *Si f est une fonction rationnelle ayant pour pôle 0, alors f n'est pas prolongeable par continuité en 0, donc n'est pas développable en série entière en 0. Dans toute la suite on supposera donc que f n'a pas pour pôle 0.*

1er cas : f a un unique pôle (non nul).
Soit $u \neq 0$ et $f_1 : x \to \dfrac{1}{x-u} = \dfrac{1}{u(\frac{x}{u}-1)} = -\dfrac{1}{u}\dfrac{1}{1-\frac{x}{u}}$
f_1 est développable en série entière en 0 pour $\left|\dfrac{x}{u}\right| < 1$ i.e. sur $B(0, |u|)$.
Alors pour $|x| < |u|$, $f(x) = -\dfrac{1}{u}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{x}{u}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{u^{n+1}}x^n$.
Soit $f_p : x \to \dfrac{1}{(x-u)^p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Par produit de fonctions développables en séries entières en 0, on sait que f_p est développable en série entière en 0 sur $]-|u|, |u|[$. Mais utiliser le produit de Cauchy de séries pour obtenir ce développement est trop lourd, inenvisageable (sauf peut-être pour $p = 2$).
En dérivant $p-1$ fois la fonction f_1 on obtient : $f_1^{(p-1)}(x) = \dfrac{(-1)^{p-1}(p-1)!}{(x-u)^p}$ et donc
$f_p(x) = \dfrac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}f_1^{(p-1)}(x)$.
En dérivant $p-1$ fois le développement de f_1 on obtiendra donc le développement de f_p.

On aurait pu aussi écrire $f_p(x) = \dfrac{(-1)^p}{u^p}\left(1-\dfrac{x}{u}\right)^{-p}$ et utiliser le développement de $(1+x)^\alpha$.

2nd cas : f a plusieurs pôles non nuls
f a pour pôles $u_1, ..., u_r$. Les éléments simples correspondant au pôle u_k sont développables en séries entières sur $]-|u_k|, |u_k|[$ (vu au dessus).
Notons alors $R = min\{|u_k| / k \in [\![1, r]\!]\}$, on déduit le

Théorème 9.4.25 *Toute fonction rationnelle f n'ayant pas pour pôle 0 est développable en série entière en 0 sur $]-R, R[$ où $R = min\{|u_k| / u_k$ décrit l'ensemble des pôles de $f\}$*

Exemple 9.4.26 *Soit* $f : x \to \dfrac{1}{(x-1)(x-2)^2}$.

— *Décomposons f en éléments simples.*
— *Donner le développement en série entière de chacun des éléments simples ainsi que l'intervalle de validité, et en déduire le développement de f sur un intervalle à préciser.*
  On doit trouver $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1+\frac{n+3}{2^{n+2}}\right)x^n$.

9.4.4 Quelques applications des DSE

Montrer qu'une fonction est $\mathcal{C}^\infty$

Exemple 9.4.27 *Montrer que la fonction* $f : x \to \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$ *est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

— *Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que f est continue en 0.*
— *Montrer que f est dérivable en 0, de dérivée continue en 0. On en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$*
— *Montrer que f est deux fois dérivable en 0, de dérivée continue en 0. On en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Mais cette démarche est vraiment lourde, et on ne voit pas comment la poursuivre pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
— *Par opérations sur les séries, montrer que pour $x \neq 0$, $f(x)$ s'écrit comme somme d'une série entière. Vérifier que cette égalité est encore vraie pour $x = 0$.*
  On en conclut que f est développable en série entière en 0. Sur quel intervalle ? Donner la valeur de $f^{(p)}(0)$ et retrouver la valeur de $f'(0)$ et celle de $f''(0)$ obtenue au-dessus.
— *Conclure.*

Exemple 9.4.28 *Généralisons l'exemple du dessus :*
Soit f développable en série entière en O et soit $\varphi : x \to \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & si\ x \neq 0 \\ f'(0) & si\ x = 0 \end{cases}$
En reprenant la démarche de la 4ème question ci dessus, montrer que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I centré en 0.

Calcul des valeurs de certaines séries numériques

Exemple 9.4.29 *Donner la valeur de* $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$.
Justifier la convergence de cette série.

On introduit la série entière $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.
Après avoir fait le lien entre A *et* S, *donner la valeur de* A.

Détermination d'une solution particulière d'une équation différentielle Il s'agit ici de reprendre la démarche initiée en 9.4.3.2, dans le but de trouver une solution particulière d'une équation différentielle. Étape indispensable, comme on le verra plus tard, pour la résolution de cette équa. diff.

Exemple 9.4.30 *On va déterminer s'il existe une solution développable en série entière en 0 solution de l'équation différentielle (E) :* $y'' + xy' + y = 0$

- *Montrer que si* $x \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est solution de (E) sur un intervalle* $]-R, R[$, *alors* $\forall n \geqslant 0,\ a_n + (n+2)a_{n+2} = 0$
- *Exprimer* a_{2p} *en fonction de* a_0 *et* a_{2p+1} *en fonction de* a_1.
- *Montrer qu'il existe une solution développable en série entière de* (E) *vérifiant* $a_0 = 1$ *et* $a_1 = 0$.
- *Reconnaître cette solution particulière, et donner l'intervalle sur lequel cette fonction est solution.*