Chapitre 8

Suites et séries de fonctions

Dans toute ce chapitre E et F désignent deux evn de dimension finie.

8.1 Suites de fonctions

8.1.1 Convergence simple

Définition 8.1.1 *Soit $X \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions* $f_n : \begin{cases} X & \to F \\ x & \to f_n(x) \end{cases}$.
On dira que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : X \to F$ si et seulement si

$$\forall x \in X, \text{ la suite vectorielle } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } f(x)$$

On écrira alors (f_n) CVS vers f.

Exemple 8.1.2 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit* $f_n \ : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \to \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{n}} \end{cases}$.
Alors la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $f : x \to \dfrac{1}{x}$

Remarque 8.1.3 *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions f_n sont bornées sur $\mathbb{R}_+^*$, mais la fonction limite f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.*
Donc, ***dans le cas de la convergence simple, le fait que les fonctions f_n sont toutes bornées sur X ne permet pas de conclure que la fonction limite sera elle aussi bornée sur X.***

Exemple 8.1.4 $f_n : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \to x^n \end{cases}$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \to \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases}$

Remarque 8.1.5 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ mais la fonction limite f n'est pas continue en 1.*
Donc, ***dans le cas de la convergence simple, le fait que les fonctions f_n sont toutes continues sur X ne permet pas de conclure que la fonction limite sera elle aussi continue sur X.***

Exemple 8.1.6 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit* $f_n : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \to \begin{cases} n & \text{si } 0 < x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{n} \text{ ou } x = 0 \end{cases} \end{cases}$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n$ et $\displaystyle\int_0^1 f$. Comparer.

Remarque 8.1.7 *Donc,* ***dans le cas de la convergence simple, le fait que la suite de fonctions f_n converge vers f sur X ne permet pas de conclure que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X f_n$ serait égale à $\displaystyle\int_X f$.***

En résumé, la convergence simple d'une suite de fonctions (f_n) vers une fonction f n'est pas un outil efficace pour déduire des propriétés de la fonction f à partir des propriétés des fonctions f_n .

8.1.2 Convergence uniforme

Définition 8.1.8 *Soit $X \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions* $f_n : \begin{cases} X & \to F \\ x & \to f_n(x) \end{cases}$.
On dira que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction $f : X \to F$

$$\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

$$\iff \lim_{n\to+\infty} \underset{x\in X}{Sup} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

On dit aussi que f est la limite uniforme de la suite (f_n)

Remarque 8.1.9 *(f_n) converge uniformément vers f sur $X \Longrightarrow$ la suite $(f_n - f)$ est bornée sur X.*

clair

Proposition 8.1.10 *(f_n) converge uniformément vers $f \Longrightarrow (f_n)$ converge simplement vers f.*

clair

ATTENTION : la réciproque est fausse, comme on va le voir.

Remarque 8.1.11 *Cette propriété est utile quand on veut étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions :*
- *On commence par étudier la convergence simple, pour déterminer la fonction limite*
- *On étudie alors la suite de fonctions $(f_n - f)$.*

Proposition 8.1.12 .
(f_n) converge uniformément vers $f \iff \exists(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}},\ \forall x \in X,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \alpha_n$ avec $\lim\limits_n \alpha_n = 0$.

Car : pour le sens direct, la suite $\alpha_n = (\operatorname{Sup}\limits_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\|)_n$ satisfait bien les conditions souhaitées.
Pour le sens réciproque, par hypothèse la suite $(\operatorname{Sup}\limits_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\|)_n$ est une suite de réels positifs qui est majorée par la suite (α_n), donc cette suite converge vers 0. Cqfd.

Remarque 8.1.13 *Il faut bien voir que la suite $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels* ***ne dépendant pas de*** *x*

Remarque 8.1.14 *Si on trouve une suite $(x_n)_n$ de points de X pour lesquels la suite $(\|f_n(x_n) - f(x_n)\|)_n$ ne converge pas vers 0, alors on conclut que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f.*

Exemple 8.1.15 *Soit $f_n : x \to x^n$ sur $[0,1]$. Montrons que cette suite de fonctions (pourtant très simple) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.*
- *Déterminer la limite simple f de cette suite de fonctions*
- *En considérant la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f.*

Exemple 8.1.16 *Soit $f_n : x \to \dfrac{nx}{1+n^2x}$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.*

Exemple 8.1.17 *Soit $f_n : x \to \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ Montrer que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.*

Exemple 8.1.18 *Soit $f_n : x \to \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$*
- *Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f à déterminer.*
- *Étudier les variations de la fonction $f_n - f$ sur $\mathbb{R}_+$.*
- *Qu'en conclure sur la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}_+$? et sur $\mathbb{R}$?*

Exemple 8.1.19 *Soit $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ x & \to \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.*
- *Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge sur $\mathbb{R}_+$ simplement vers une fonction f à déterminer.*
- *Soit $a > 0$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$*
- *Montrer que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.*

Proposition 8.1.20 . *$\forall n,\ f_n$ est bornée sur X et $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $X \implies$ la fonction f est bornée sur X.*

Car ...

en reprenant l'exemple 8.1.2, on peut conclure par contraposée que la suite (f_n) ne convergeait pas uniformément vers f.

8.1.3 Convergence uniforme sur tout compact

Définition 8.1.21 *Soit $X \subset E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : \begin{cases} X & \to F \\ x & \to f_n(x) \end{cases}$.*
On dira que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction $f : X \to F$ sur tout compact de X

$$\iff \forall K \text{ compact de } X,\ \text{la suite } (f_{n|K})_n \text{ des restrictions de } f_n \text{ à } K,$$

$$\text{converge uniformément sur } K \text{ vers la restriction de } f \text{ à } K$$

$$\iff \forall K \text{ compact de } X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in K, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

$$\iff \lim_{n\to+\infty} \underset{x\in K}{Sup} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

Remarque 8.1.22 ***Important*** *: On a vu dans l'exemple 8.1.18 qu'une fonction qui converge uniformément sur tout compact de I ne converge pas forcément uniformément sur I*

Proposition 8.1.23 *Dans le cas de fonctions définies sur $X \subset \mathbb{R}$, la convergence uniforme sur tout compact équivaut à la convergence uniforme sur tout segment inclus dans X.*

Car ...

Exemple 8.1.24 *Soit $f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \to xe^{\frac{x}{n}} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.*

- *Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_n$.*
- *Montrer que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.*
- *Montrer que cette suite de fonctions converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.*

Exemple 8.1.25 *Soit $f_n : \begin{cases}]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \to \left(\dfrac{x}{n}\right)^{nx} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$*

- *Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_n$.*
- *Montrer que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.*
- *Montrer que cette suite de fonctions converge uniformément sur tout compact de $]0, +\infty[$.*

8.1.4 Opérations et convergence uniforme

Théorème 8.1.26 .

$$\left.\begin{array}{l} (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X \\ (g_n)_n \text{ converge uniformément vers } g \text{ sur } X \end{array}\right\},\ \alpha, \beta \in K \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} (\alpha f_n + \beta g_n)_n \text{ converge uniformément} \\ \text{vers } \alpha f + \beta g \text{ sur } X \end{array}\right.$$

car ...

MAIS

$$\left.\begin{array}{l} (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X \\ (g_n)_n \text{ converge uniformément vers } g \text{ sur } X \end{array}\right\} \not\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} (f_n g_n)_n \text{ converge uniformément} \\ \text{vers } fg \text{ sur } X \end{array}\right.$$

Exemple 8.1.27 *Soit $f_n : x \to x + \dfrac{1}{n}$ et $g_n : x \to \dfrac{1}{n}$*

- *Montrer que les suites $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent uniformément respectivement sur $\mathbb{R}$ vers des fonctions f et g à déterminer.*
- *Montrer que la suite $(f_n g_n)_n$ ne converge pas uniformément vers fg sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 8.1.28 *(Ce n'est pas un résultat de cours)*

$$\left.\begin{array}{c}\forall n \text{ les fonctions } f_n \text{ et } g_n \text{ sont bornées sur } X\\ (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X\\ (g_n)_n \text{ converge uniformément vers } g \text{ sur } X\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(f_ng_n)_n \text{ converge uniformément}\\ \text{vers } fg \text{ sur } X\end{array}\right.$$

Théorème 8.1.29 .

$$\left.\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X\\ (f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } Y\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément}\\ \text{vers } f \text{ sur } X\cup Y\end{array}\right.$$

Car ...

Conséquence 8.1.30 .

$$\left.\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a,b[\\ \text{La suite vectorielle } (f_n(b))_n \text{ converge vers } \ell\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [a,b]\\ \text{vers } \tilde{f} : x \to \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq b\\ \ell \text{ si } x = b\end{cases}\end{array}\right.$$

Car ...
Ce théorème se prolonge clairement sous la forme

Conséquence 8.1.31 .

$$\left.\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X\setminus\{x_0\}\\ \text{La suite vectorielle } (f_n(x_0))_n \text{ converge vers } \ell\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément sur } X\\ \text{vers } \tilde{f} : x \to \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0\\ \ell \text{ si } x = x_0\end{cases}\end{array}\right.$$

8.2 Continuité, double limite, intégrale sur un segment

8.2.1 Continuité

Théorème 8.2.1 *Soit $X \subset E$, $a \in X$, et $\forall n,\ f_n : X \to F$.*

$$\left.\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X\\ \forall n,\ f_n \text{ continue en } a\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continue en } a$$

car ...

Exemple 8.2.2 *Reprenons l'exemple 8.1.4, la fonction limite f n'étant pas continue en 1, on conclut par contraposée que la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.*

Conséquence 8.2.3 ***Importante** :*

$$\left.\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } X\\ \forall n,\ f_n \text{ continue sur } X\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continue sur } X$$

Clair.

Théorème 8.2.4 *Cas de la convergence sur tout compact*

$$\left.\begin{array}{c}(f_n)_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur tout compact de } X\\ \forall n,\ f_n \text{ continue sur } X\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continue sur } X$$

Car ...

Remarque 8.2.5 *La convergence uniforme sur tout compact de X de fonctions continues sur X suffit à prouver la continuité de la fonction limite sur l'ensemble X tout entier, mais ne prouve absolument pas la convergence uniforme sur X tout entier.*

Conséquence 8.2.6 *On suppose X compact. On sait que $\mathcal{C}(X,F) \subset \mathcal{B}(X,F)$, où $\mathcal{B}(X,F)$ est un ev normé par la norme $\|.\|_\infty$*
Alors $\mathcal{C}(X,F)$ est un fermé de $\mathcal{B}(X,F)$.

car ...

8.2.2 Interversion de limites

Le problème vient du fait suivant : considérons $f_n : \begin{cases} [0,1[& \to \mathbb{R} \\ x & \to x^n \end{cases}$.

Déterminons $\lim\limits_{x\to 1\ x\neq 1}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to 1\ x\neq 1} f_n(x)\right)$.
Que constate-t-on ?
En d'autres termes on ne peut pas "changer l'ordre des limites" sans précaution ...
Dans le cas de la convergence uniforme, on dispose du théorème suivant :

Théorème 8.2.7 *Soit $X \subset E$, $a \in \overline{X}$*

$$\left.\begin{array}{r}(f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } X \\ \forall n,\ \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \ell_n \in F\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{La suite vectorielle } (\ell_n)_n \text{ converge et} \\ \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n\end{array}\right.$$

Démonstration non exigible.

Généralisation 8.2.8 ***Cas des limites infinies***

$$\left.\begin{array}{c}\forall n,\ f_n : [a,b[\to \mathbb{R} \\ (f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } [a,b[\\ \forall n,\ \lim\limits_{x\to b} f_n(x) = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$$

8.2.3 Intégration d'une limite uniforme sur un segment

On a vu dans l'exemple 8.1.6 que si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers une fonction f sur $[a,b]$, rien ne permet de penser que la suite des intégrales $(\int_a^b f_n)_n$ convergerait vers $\int_a^b f$. Dans cet exemple, les fonctions n'étaient pas continues sur le segment, seulement continues par morceaux. Donnons un exemple avec des fonctions continues.

Exemple 8.2.9 *Soit f_n fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(0) = f_n(2/n) = 0$, $f_n(1/n) = n$, f_n affine sur $[0,1/n]$ et sur $[1/n,2/n]$, enfin f_n nulle sur $[2/n,1]$.*

- *Construire sa courbe représentative.*
- *Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.*
- *Calculer $\int_0^1 f_n$ et $\int_0^1 f$.*
- *La suite $(\int_0^1 f_n)_n$ converge-t-elle vers $\int_0^1 f$?*

Dans le cas de la convergence uniforme sur un segment, les choses s'arrangent :

Théorème 8.2.10 *Soit $\forall n,\ f_n : [a,b] \to F$ des fonctions continues sur $[a,b]$.*
$(f_n)_n$ CVU vers f sur $[a,b] \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

Car ...

Corollaire 8.2.11 ***Primitivation***
Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F. Soit $a \in I$.
On suppose que $(\varphi_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction φ.
On pose $\Phi_n : x \to \int_a^x \varphi_n(t)dt$ et $\Phi : x \to \int_a^x \varphi(t)dt$.
Alors, la suite $(\Phi_n)_n$ converge simplement vers Φ sur I, et la convergence est uniforme sur tout segment de I.

Car ...

8.2.4 Dérivation d'une suite de fonctions

Préambule : malheureusement, pour la dérivation, la CVU des fonctions à dériver ne suffit pas.

$$\left.\begin{array}{r}(f_n)_n \text{ CVU vers } f \text{ sur } I\\ \forall n,\ f_n \text{ dérivable sur } I\end{array}\right\} \not\Rightarrow f \text{ dérivable sur } I, \text{ comme le montre l'exemple ci dessous}$$

Exemple 8.2.12 *Soit f_n définie sur $[-1,1]$ par $\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.*
- *Montrer que la suite $(f_n)_n$ CVU sur $[-1,1]$ vers une fonction f à déterminer.*
- *$\forall n,\ f_n$ est dérivable sur $[-1,1]$. Qu'en est-il de f ?*

Théorème 8.2.13 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I à valeurs dans F.*
On suppose que $(f_n)_n$ converge SIMPLEMENT vers une fonction f sur I
On suppose que la suite des DÉRIVÉES $(f_n')_n$ CVU sur tout segment de I vers une fonction g
Alors

1. *$(f_n)_n$ CVU vers f sur tout segment de I,*
2. *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,*
3. *$f' = g$ i.e. $\left(\lim\limits_n f_n\right)' = \lim\limits_n (f_n')$.*

Car ...

Corollaire 8.2.14 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I à valeurs dans F $(p \geqslant 1)$.*
On suppose que $\forall k \in [\![0,p]\!],\ (f_n^{(k)})_n$ converge SIMPLEMENT sur I
On suppose que la suite $(f_n^{(p)})_n$ CVU sur tout segment de I vers une fonction g
Alors

1. *$f = \lim\limits_n f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et $f^{(p)} = g$,*
2. *$\forall k \in [\![1, p]\!]$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ CVU sur tout segment de I vers $f^{(k)}$.*

Car : récurrence sur p

Conséquence 8.2.15 *Soit $\forall n,\ f_n \in \mathcal{C}^\infty(I, F)$ telles que*

- *La suite $(f_n)_n$ CVS sur I,*
- *$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (f_n^{(k)})_n$ CVU sur tout segment de I*

alors, la fonction $f = \lim\limits_n f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et $\forall k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ CVU sur tout segment de I vers $f^{(k)}$.

Car ...

8.3 Convergence uniforme et normale d'une série de fonctions

Rappel Étudier la série de terme général $u_n \in E$ c'est étudier la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
De même, l'étude de la suite de terme général u_n peut se ramener à l'étude de la série télescopique de terme général $v_n = u_n - u_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ et $v_0 = u_0$.
L'étude des séries de fonctions va donc se ramener à l'étude des suites de fonctions. On va donc traduire pour les séries les résultats déjà vus pour les suites de fonctions.

8.3.1 Convergence uniforme d'une série de fonctions

Définition 8.3.1 *Soit $X \subset E$ et $\forall n,\ u_n : X \to F$ des fonctions.*
Etudier la série de fonctions $\sum u_n$ c'est d'abord déterminer l'ensemble des $x \in X$ tq la série vectorielle $\sum\limits_n u_n(x)$ converge.

Notons alors $Y = \left\{x \in X / \sum\limits_n u_n(x)\ CV\right\}$, alors on définit la fonction $S : \begin{cases} Y & \to F \\ x & \to \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x). \end{cases}$
On dit alors que la série de fonction $\sum\limits_n u_n$ converge simplement sur Y vers la fonction S.

Le problème revient donc à étudier des séries vectorielles dépendant d'un paramètre x.

Exemple 8.3.2 *Étudions la convergence simple des séries suivantes*

1. $\sum\limits_n z^n \qquad (z \in \mathbb{C})$
2. $\sum\limits_n \dfrac{1}{1 + n^2 x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$

3. $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} \qquad (x \in \mathbb{R})$
4. $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{e^{-nx}}{n} \qquad (x \in \mathbb{R})$

Définition 8.3.3 *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de X dans F. On dit que la série de fonctions $\sum_n u_n$ (aussi notée $\sum_n u_n(x)$) converge uniformément (CVU) sur X si et seulement si :*

— *$\forall x \in X, \sum_n u_n(x)$ converge*
— *la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ CVU sur X*

Conséquence 8.3.4 *La série de fonctions $\sum_n u_n$ CVU sur X si et seulement si la suite des restes (R_n) CVU vers 0*
Prouver que $\sum_n u_n(x)$ CVU sur X c'est donc aussi majorer uniformément les suites $(\|R_n(x)\|)_n$ par une suite $(\alpha_n)_n$ ne dépendant pas de x et convergeant vers 0.

Car ...

Proposition 8.3.5 *$\sum u_n$ CVU $\Longrightarrow$ la suite de fonctions $(u_n)_n$ CVU vers la fonction nulle.*

Car ...

Exemple 8.3.6 *La série $\sum x^n$ CV simplement sur $[0,1[$ mais ne converge pas uniformément sur $[0,1[$ (voir 8.1.4).*

8.3.2 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 8.3.7 *La série $\sum u_n(x)$ CV Normalement (CVN) sur X*

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall n, \text{ la fonction } u_n \text{ est bornée sur } X \\ \text{la série positive } \sum \|u_n\|_\infty \text{ converge} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists (\alpha_n)_n \text{ suite réelle tq } \underset{x \in X}{Sup} \|u_n(x)\| \leqslant \alpha_n \\ \sum \alpha_n \text{ converge} \end{cases}$$

Exemple 8.3.8 *Soit $f_n : x \to \dfrac{1}{n^2 + x^2}$. Montrons que $\sum f_n$ Converge normalement sur $\mathbb{R}$*

Théorème 8.3.9 *CVN $\Longrightarrow$ CVU*

Car ...

Conséquence 8.3.10 *Pour prouver qu'une série CVU on commencera souvent par chercher si elle CVN. Dans l'affirmative, la CVU est assurée par ce théorème. Si la convergence n'est pas normale, il est encore possible que la série converge uniformément. Il faudra donc faire une nouvelle étude en utilisant la propriété 8.3.4*

En résumé $\boxed{\begin{array}{l} \text{CVN} \Longrightarrow \text{CVU} \Longrightarrow \text{CVS} \\ \Downarrow \qquad\qquad\qquad\quad \Uparrow \\ \forall x \in X,\ \sum\limits_n u_n(x) \text{ converge absolument (CVA).} \end{array}}$

Attention : toutes les réciproques sont fausses.

Exemple 8.3.11 *Soit f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$. Montrons que la série $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}_+$.*

Exemple 8.3.12 *Soit f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$*

- *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(x)$ converge (la série de fonctions converge simplement)*
- *Montrer en utilisant TSA que la série $\sum f_n$ CVU sur $\mathbb{R}$.*
- *Montrer que la série $\sum\limits_n f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.*

Définition 8.3.13 *La série $\sum u_n(x)$ CV Normalement (CVN) sur tout compact de X*

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall K \text{ compact de } X, \forall n, \text{ la fonction } u_n \text{ est bornée sur } K \\ \text{la série positive } \sum \|u_n\|_{K,\infty} \text{ converge} \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \forall K \text{ compact de } X, \exists (\alpha_{K,n})_n \text{ suite réelle tq } \underset{x \in K}{Sup} \|u_n(x)\| \leqslant \alpha_{K,n} \\ \sum \alpha_{K,n} \text{ converge} \end{array} \right.$$

Théorème 8.3.14 *CVN sur tout compact $\Longrightarrow$ CVU sur tout compact.*

8.3.3 Cas des séries alternées

Ce qui suit ne constitue pas un théorème de cours, ce doit être démontré chaque fois que nécessaire. Il est néanmoins essentiel de l'avoir vu pour pouvoir l'utiliser si besoin est.

Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}_+$.
Supposons que $\forall x \in X$, la suite $(u_n(x))_n$ décroît et tend vers 0. On sait (TSA) qu'alors la série $\sum\limits_n (-1)^n u_n(x)$ converge, i.e. la série de fonctions $\sum\limits_n u_n$ CVS sur X. La question qui se pose alors est celle de la convergence uniforme de la série $\sum\limits_n u_n$.
On sait que pour avoir CVU de la série il est nécessaire d'avoir CVU de la suite de fonctions (voir la propriété 8.3.5)
Supposons donc que la suite de fonctions $(u_n)_n$ CVU vers 0 sur X.
Le TSA nous dit que pour tout $x \in X$, le reste $R_n(x)$ d'ordre n de la série $\sum\limits_n (-1)^n u_n(x)$ vérifie $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|$. Or la suite u_n convergeant uniformément, on déduit que $\forall x \in X,\ |u_{n+1}(x)| \leqslant \|u_{n+1}\|_\infty$.
Donc $\forall x \in X,\ |R_n(x)| \leqslant \|u_{n+1}\|_\infty$. Or la suite $(u_n)_n$ CVU, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_{n+1}\|_\infty = 0$ et donc la suite de fonctions $(R_n)_n$ CVU vers 0.
Finalement sous ces hypothèses on conclut que la série $\sum u_n$ CVU sur X.

8.4 Propriétés des séries de fonctions

8.4.1 Continuité et interversion des limites

Théorème 8.4.1 *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de X dans F, soit $a \in X$.*

$$\left.\begin{array}{c}\sum\limits_n u_n \text{ converge uniformément sur } X \\ \forall n,\ u_n \text{ continue en } a\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{la fonction } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ continue en } a$$

Il suffit d'appliquer le théorème 8.2.1 à la suite de fonctions $(S_n)_n$.

Corollaire 8.4.2 .

$$\left.\begin{array}{c}\sum\limits_n u_n \text{ converge uniformément sur } X \\ \forall n,\ u_n \text{ continue sur } X\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{la fonction } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ continue sur } X$$

Clair voir théorème 8.2.3

Corollaire 8.4.3 .

$$\left.\begin{array}{c}\sum\limits_n u_n \text{ converge uniformément sur tout compact de } X \\ \forall n,\ u_n \text{ continue sur } X\end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ continue sur } X$$

Clair voir théorème 8.2.4

Exemple 8.4.4 *Montrons que la fonction* $f : x \to \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.

Théorème 8.4.5 *Soit $X \subset E$, $a \in \overline{X}$ et $(u_n)_n$ une suite de fonctions de X dans F.*

$$\left.\begin{array}{c}\sum\limits_n u_n \text{ CVU sur } X \\ \forall n,\ \lim\limits_{x\to a} u_n(x) = \ell_n \in F\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{La série vectorielle } \sum\limits_n \ell_n \text{ converge vers une limite } \ell \text{ et} \\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \text{ a pour limite } \ell \text{ quand } x \text{ tend vers } a \\ \text{i.e. } \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to a} u_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n\end{array}\right.$$

Exemple 8.4.6 *On considère la série de fonctions* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n}$

- *Justifier que cette série converge sur* $]-1,1[$. *On note S sa somme.*
- *Montrer que S est continue sur* $]-1,1[$
- *Montrer que cette série converge uniformément sur* $[0,1[$.
- *Déterminer la limite de S en 1.*
- *Montrer que cette série ne converge pas uniformément sur* $]-1,0]$ *(on pourra s'intéresser aux limites en* -1*).*

Exemple 8.4.7 *On considère la série* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{x}{n^2+x^2}$

- *Montrer que cette série CVS sur* $\mathbb{R}$
- *On va chercher si la série a une limite quand* $x \to +\infty$.
  - *Justifier :* $\displaystyle\int_n^{n+1} x\frac{dt}{t^2+x^2} \leqslant \frac{x}{n^2+x^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} x\frac{dt}{x^2+t^2}$ *pour* $x > 0$.

— *En intégrant les membres gauche et droite de cette double inégalité, en déduire un encadrement de* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$ *et conclure sur* $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$

— *Le théorème sur l'interversion des limites est-il applicable quand* x *tend vers* $+\infty$ *?*

8.4.2 Intégration sur un segment

Théorème 8.4.8 *Soit* $\forall n,\ u_n : [a,b] \to F$ *des fonctions continues sur* $[a,b]$.

$$\sum_n u_n \text{ CVU sur } [a,b] \Longrightarrow \int_a^b \left(\sum_0^{+\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_0^{+\infty} \left(\int_a^b u_n(t)dt\right).$$

C'est le théorème sur les suites de fonctions.

Exemple 8.4.9 *On sait que pour* $|t| < 1$, $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$ *(Rappeler pourquoi)*

— *Montrer que cette série CVU sur tout compact de* $]-1,1[$.

— *En déduire, pour* $|x| < 1$*, une écriture de* $\ln(1+x)$ *sour forme de série.*

— *Étudier la limite quand* x *tend vers 1, et conclure sur* $\ln(2)$

8.4.3 Dérivation terme à terme d'une série

Théorème 8.4.10 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de fonctions de* I *dans* F*, telle que*

— $\forall n,\ u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'intervalle* I

— $\sum_n u_n'$ *CVU sur tout segment de* I

— $\sum_n u_n$ *converge simplement sur* I

alors

— $S = \sum_n u_n$ *CVU sur tout segment de* I,

— S *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I,

— $\forall x \in I,\ S'(x) = \sum_n u_n'(x)$

Clair.

Corollaire 8.4.11 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de fonctions de* I *dans* F*, telle que*

— $\forall n,\ u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur l'intervalle* I

— $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \sum_n u_n^{(k)}$ *CVS sur* I

— $\sum_n u_n^{(p)}$ *CVU sur tout segment de* I

alors

— $\forall k \in [\![0, p]\!],\ \sum_n u_n^{(k)}$ *CVU sur tout segment de* I*. Notons* $S = \sum_0^{+\infty} u_n$,

— S *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* I,

— $\forall k \in [\![0, p]\!],\ \forall x \in I,\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x)$

Corollaire 8.4.12 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de fonctions de* I *dans* F*, telle que*

— $\forall n,\ u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur l'intervalle* I
— $\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_n u_n^{(k)}$ *CVU sur tout segment de* I

alors notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
— S *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* I *et*
— $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x)$

Exemple 8.4.13 *Etude de la fonction* $\zeta : x \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ *(fonction zeta de Riemann)*
— *Ensemble de définition* D
— *Montrer que cette fonction est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* D
— *Montrer que cette fonction est de classe* $\mathcal{C}^{+\infty}$ *sur* D

Plus de questions en TD

8.4.4 Un exemple d'application

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{A}$ est une algèbre normée de dimension finie d'élément unité 1, et $\mathcal{B}$ désigne la boule ouverte unité de $\mathcal{A}$.

Proposition 8.4.14 $\forall a \in \mathcal{A},\ \|a\| < 1 \Longrightarrow 1 - a$ *est inversible dans* $\mathcal{A}$, *d'inverse* $\sum_0^{+\infty} a^n$

Déjà vu Chapitre 4.4.3

Proposition 8.4.15 *L'application* $\begin{cases} \mathcal{B} & \to \mathcal{A} \\ a & \to (1-a)^{-1} \end{cases}$ *est continue sur* $\mathcal{B}$

Car ...

Théorème 8.4.16 — *Notons exp l'application* $exp : \begin{cases} \mathcal{A} & \to \mathcal{A} \\ a & \to \sum_0^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \end{cases}$. *Cette application est définie et continue sur* $\mathcal{A}$
— *Soit* $a \in \mathcal{A}$.
L'application $e_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathcal{A} \\ t & \to exp(ta) \end{cases}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et*, $e'_a = a.e_a = e_a.a$

Car ...
Plaçons nous dans le cas où $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ et où $a = 1$.
Alors $e_1 : t \to exp(t)$. On vient de voir que $exp(t)' = 1exp(t) = exp(t)$ Donc la fonction ici désignée par exp vérifie la même équation différentielle que la fonction $t \to e^t$ vue en Mpsi.
De plus, $exp(0) = 1 = e^0$. Donc exp et $t \to e^t$ vérifient la même équation différentielle du premier ordre, avec les mêmes conditions initiales, donc

Proposition 8.4.17 $\forall t \in \mathbb{R}, e^t = exp(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$

Remarque 8.4.18 *La définition de exp vue dans le théorème 8.4.16 généralise à toute algèbre normée la définition qu'on avait jusqu'à présent de la fonction exponentielle d'une variable réelle.*

On peut donc par exemple parler d'exponentielle de matrices, comme on l'avait vu auparavant.

8.5 Approximations uniformes sur un segment des fonctions d'une variable réelle

Théorème 8.5.1 ***Approximation uniforme par des fonctions en escaliers***
Soit $f : [a,b] \to F$ continue sur $[a,b]$.
$\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi_\varepsilon : [a,b] \to F$ *en escaliers tq* $\forall x \in [a,b],\ \|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)\| \leqslant \varepsilon$

Car ...

Conséquence 8.5.2 ***séquentielle***
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],F)$, $\exists (\varphi_n)_n$ suite des fonctions en escaliers sur $[a,b]$ tq $(\varphi_n)_n$ CVU vers f sur $[a,b]$
i.e. toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers sur ce segment.

Remarque 8.5.3 *On voit à ce propos que la limite uniforme de fonctions non continues peut tout à fait être continue ...*

Théorème 8.5.4 ***Approximation par des polynômes : théorème de Weierstrass*** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue sur $[a,b]$*
Il existe une suite $(P_n)_n$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que la suite des fonctions polynomiales associées CVU vers f sur $[a,b]$

Démonstration non exigible.

Remarque 8.5.5 *Ces deux théorèmes d'approximations supposent que la fonction approximée est continue* ***sur un segment****.*

Exemple 8.5.6 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_a^b x^n f(x)dx = 0$. Montrons que $f = 0$.*

- *Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \displaystyle\int_a^b Pf = 0$.*
- *En considérant la suite $(P_n)_n$ du théorème de Weierstrass, montrer que la suite de fonction $(P_n f)_n$ CVU vers f^2 sur $[a,b]$.*
- *Montrer que $\displaystyle\int_a^b f^2 = 0$ et conclure.*