Chapitre 6

Topologie d'un evn

6.1 Éléments de topologie d'un evn

Dans toute la suite E est un espace vectoriel normé, la norme étant (sauf mention contraire) notée $\|.\|$.

6.1.1 Ouverts

Définition 6.1.1 *Soit $U \subset E$.*
On dira que U est un ouvert de E si et seulement si $\forall a \in U,\ \exists r > 0,\ B(a,r) \subset U$.

Exemple 6.1.2 $]0,1[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$.
$[0,1]$ *n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}$.
$\{0\}$ *n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}$.

Proposition 6.1.3 *Toute boule ouverte est un ouvert.*

En effet ...

Proposition 6.1.4 ***Conséquence 6.1.5*** *Tout intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$.

1. *E et $\emptyset$ sont des ouverts de E.*
2. *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert*
3. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

car ...
Mais une intersection quelconque d'ouverts de E n'est pas forcément un ouvert de E. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $O_n =]-1/n, 1/n[$. Les O_n sont bien des ouverts (car intervalles ouverts de $\mathbb{R}$).
Mais $\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n = \{0\}$ dont on a vu que ce n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Théorème 6.1.6 *Si N et N' sont des normes équivalentes, alors tout ouvert pour N est un ouvert pour N' et réciproquement.*

car ...

Conséquence 6.1.7 *Dans un evn de dimension finie, la notion d'ouvert ne dépend pas de la norme.*

Proposition 6.1.8 $E = E_1 \times ... \times E_p$ *un evn produit.*
Si $\forall k \in [\![1, p]\!]$, Ω_k *ouvert de* E_k, *alors* $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_p$ *est un ouvert de l'evn produit* E.

En effet ...

Exemple 6.1.9 $A =]-1, 1[\times]-1, 1[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.
(on pourrait aussi dire que A *est la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour la norme infinie de* $\mathbb{R}^2$*)*

6.1.2 Voisinages d'un point

Définition 6.1.10 *Soit* $a \in E$ *et* $V \subset E$.
On dira que V *est un voisinage de* a *ssi* $\exists r > 0,\ B(a, r) \subset V$.
On notera $\mathcal{V}(a)$ *l'ensemble des voisinages de* a.

Proposition 6.1.11
1. $\forall V \in \mathcal{V}(a),\ a \in V$.
2. *Toute partie contenant un voisinage de* a *est un voisinage de* a.
3. *Une intersection finie de voisinages de* a *est un voisinage de* a, *mais ce n'est pas le cas d'une intersection quelconque.*

Remarque 6.1.12
1. U *ouvert de* E *et* $a \in U \Longrightarrow U$ *est un voisinage de* a.
2. *Soit* $U \subset E$.
   U *ouvert de* $E \iff U$ *est voisinage de tous ses points.*

Proposition 6.1.13 *Si* N *et* N' *sont des normes équivalentes, alors tout voisinage de* a *pour* N *est un voisinage de* a *pour* N' *et réciproquement.*

Car ...

6.1.3 Fermés d'un evn

Définition 6.1.14 *Soit* $F \subset E$.
On dira que F *est un fermé ssi son complémentaire dans* E *est un ouvert, i.e.*
$\forall x \notin F,\ \exists r > 0,\ B(x, r) \cap F = \emptyset$

Exemple 6.1.15
1. *Tout singleton est un fermé.*
2. *Une boule fermée est un fermé. En effet ...*
3. *Toute sphère est un fermé. En effet ...*

Proposition 6.1.16
1. $\emptyset$ *et* E *sont fermés. Ce sont à la fois des ouverts et des fermés.*
2. *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*
3. *Une réunion* ***finie*** *de fermés est un fermé.*
4. *Si* N *et* N' *sont des normes équivalentes, alors tout fermé pour* N *est un fermé pour* N' *et réciproquement.*

Se démontre en travaillant sur les complémentaires et en utilisant les propriétés ensemblistes, connues mais à redémontrer : Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E.

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} (A_i^c) \text{ et } \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} (A_i^c)$$

Conséquence 6.1.17 *Toute partie finie de E est un fermé*

Car c'est une réunion finie de singletons dont on sait qu'ils sont fermés.

Remarque 6.1.18 ***important*** *: il existe des parties de E qui ne sont ni ouvertes ni fermées, i.e. si on sait que $A \subset E$ n'est pas un ouvert, on ne peut pas en conclure sans argument supplémentaire que A serait un fermé.*
Par exemple : $[0,1[$ n'est ni un ouvert ni un fermé de $\mathbb{R}$ (le démontrer)

Proposition 6.1.19 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. I est un fermé $\iff$ I contient ses bornes réelles. i.e. les seuls intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont les segments $[a,b]$ ainsi que les $[a,+\infty[$ et $]-\infty,b]$*

Attention : les intervalles ne sont pas les seuls fermés de $\mathbb{R}$. Par exemple :
— $[0,1]\cup[3,4]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ (dire pourquoi) mais n'est pas un intervalle.
— $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$ (le démontrer)

Proposition 6.1.20 *$E = E_1 \times ... \times E_p$ un evn produit.*
Si $\forall k \in [\![1,p]\!]$, F_k fermé de E_k, alors $F = F_1 \times ... \times F_p$ est un fermé de E.

En effet ...

Exemple 6.1.21 *$A = [-1,1]\times[-1,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.*
(on pourrait aussi dire que A est la boule unité fermée pour la norme infinie de $\mathbb{R}^2$)

6.1.4 Intérieur, adhérence, frontière d'une partie de E

Il s'agit ici de donner un sens précis à des notions intuitives, comme celle de bord, de point à l'intérieur d'une partie etc.

6.1.4.1 Intérieur

Définition 6.1.22 *Soit $A \subset E$ et $a \in E$.*

1. *a est un **point intérieur** à A ssi $\exists r > 0,\ B(a,r) \subset A$*
2. ***L'intérieur de** A est l'ensemble de tous les points intérieurs à A et se note $\overset{\circ}{A}$*

Remarque 6.1.23 *$\overset{\circ}{A} \subset A$.*

Exemple 6.1.24 *Dans $\mathbb{R}$:*

1. *$]a,b[= \overset{\circ}{\overline{[a,b]}}$ = $\overset{\circ}{\overline{[a,b[}}$*
2. *$\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$. Dire pourquoi.*

Proposition 6.1.25 *$\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de E.*

Car ...

Proposition 6.1.26 *A ouvert* $\iff \overset{\circ}{A} = A$

Un sens est déjà prouvé, dire lequel.
Montrons l'autre sens ...

Proposition 6.1.27 $\overset{\circ}{A}$ *est le plus grand ouvert inclus dans A.*

En effet ....

Remarque 6.1.28 *Cette propriété permet de retrouver l'exemple 6.1.24 1.*

Conséquence 6.1.29 $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$

Exercice 6.1.30 *Soit $A, B \subset E$. Montrer :*

1. $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$
2. $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
3. $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$
   Donner un exemple pour lequel il n'y a pas égalité.

6.1.4.2 Adhérence

Définition 6.1.31 *Soit $A \subset E$ et $a \in E$.*

1. *a est un* ***point adhérent*** *à A ssi $\forall r > 0,\ B(a, r) \cap A \neq \emptyset$, i.e.*
   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ x \in A$ tel que $\|x - a\| < \varepsilon$
2. ***L'adhérence de*** *A est l'ensemble de tous les points adhérents à A et se note $\overline{A}$*

Remarque 6.1.32 ***ATTENTION*** *: la notation $\overline{A}$ a plusieurs sens : elle signifie l'adhérence de A, mais parfois elle est employée pour désigner le complémentaire d'un ensemble, ou en probabilités, l'évènement contraire de A, ou même, dans le cas de parties de $\mathbb{C}$ elle peut désigner l'ensemble des conjugués des éléments de A.*
En topologie elle désignera l'adhérence ; c'est pourquoi, en topologie, ou s'il y a risque de conflit de notation, le complémentaire de A dans E se notera A^c ou $E \setminus A$.

Remarque 6.1.33 $A \subset \overline{A}$

Proposition 6.1.34 $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$

Proposition 6.1.35 $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$

En effet ...

Conséquence 6.1.36 $\overline{A}$ *est un fermé.*

car son complémentaire est un intérieur, donc est ouvert.

Proposition 6.1.37 $\overline{A} = A \iff A$ *fermé.*

Proposition 6.1.38 *$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*

car ...

Conséquence 6.1.39 $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Exemple 6.1.40
1. $\overline{]0,1[} = [0,1] = \overline{[0,1[}$
2. $\overline{\mathbb{R}^*} = \mathbb{R}$.
3. $\overline{\mathbb{Z}} =$ *(préciser)*

6.1.4.3 Frontière

Définition 6.1.41 *Soit $A \subset E$ et $a \in E$.*
1. *a est un **point frontière de** A ssi $\forall r > 0,\ B(a,r) \cap A \neq \emptyset$ et $B(a,r) \cap (A^c) \neq \emptyset$*
2. ***La frontière de** A est l'ensemble de tous les points frontière de A et se note $fr(A)$*

Proposition 6.1.42 $fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{(E \setminus A)}$

Conséquence 6.1.43 *$fr(A)$ est un fermé de E.*

clair, car intersection de 2 fermés.

Exemple 6.1.44 *Pour a et b réels, $fr(]a,b]) = fr([a,b]) = fr(]a,b[) = fr([a,b[) = \{a,b\}$ car ...*

6.1.4.4 Normes équivalentes

Théorème 6.1.45 *Si N et N' sont des normes équivalentes et $A \subset E$, alors*
- *l'intérieur de A pour N est égal à l'intérieur de A pour N'*
- *l'adhérence de A pour N est égale à l'adhérence de A pour N'*
- *la frontière de A pour N est égale à la frontière de A pour N'*

Car ...

Remarque 6.1.46 *C'est la raison pour laquelle dans les exemples concernant les intervalles de $\mathbb{R}$ on n'a jamais précisé quelle norme on choisissait sur $\mathbb{R}$.*

6.1.5 Caractérisations séquentielles

Théorème 6.1.47 $a \in \overline{A} \iff \exists\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$, *tq* $\lim a_n = a$
i.e. $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites de A convergentes.

Car ...

Conséquence 6.1.48 *A est un fermé $\iff$ (toute suite de A qui converge a sa limite dans A)*

car ...

Application 6.1.49 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers ℓ.*
Alors $\overline{\{u_n/n \in \mathbb{N}\}} = \{u_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$

En effet ...

6.1.6 Parties denses

Définition 6.1.50 *Soit $A \subset E$.*
On dira que A est dense (dans E)
$$\iff \overline{A} = E$$
$$\iff \forall x \in E, \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$$
$$\iff \forall x \in E, \forall r > 0,\ \exists\ a \in A, \|a - x\| < r$$
$$\iff \forall x \in E,\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ tq\ \lim a_n = x$$

Exemple 6.1.51
1. *$\mathbb{R}^*$ est dense dans $\mathbb{R}$.*
2. *Q est dense dans $\mathbb{R}$: en effet, on a vu en Mpsi qu'entre 2 réels distincts il existe toujours un rationnel. Vérifier alors que Q est dense dans $\mathbb{R}$*
3. *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: à redémontrer en utilisant l'exemple du dessus.*

Définition 6.1.52 *Soit $A \subset B \subset E$*
On dira que A est dense dans B $\iff B \subset \overline{A}$
$\iff$ *tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A*

Exemple 6.1.53
1. *$]0,1[$ est dense dans $[0,1]$*
2. *$\{r \in \mathbb{Q} / |r| < 1\}$ est dense dans $[-1,1]$*

Proposition 6.1.54 *Si N et N' sont des normes équivalentes,*
A est dense dans E pour $N \iff A$ est dense dans E pour N'

C'est dû au fait que l'adhérence de A pour N est l'adhérence de A pour N'.

6.1.7 Ouverts et fermés relativement à une partie de E

Définition 6.1.55 *Soit $A \subset E$.*
- *Soit $U \subset A$. On dira que U est un ouvert de A ssi il existe un ouvert Ω de E tel que $U = A \cap \Omega$*
  i.e. un ouvert de A (ou relativement à A) est un ensemble de la forme $A \cap \Omega$ où Ω est un ouvert de E.
- *Un fermé de A (ou relativement à A) est un ensemble de la forme $A \cap F$ où F est un fermé de E.*

Remarque 6.1.56 *Il faut bien voir que A n'est pas un espace vectoriel, donc il s'agit ici de définitions nouvelles.*

Conséquence 6.1.57
1. *U est un ouvert de $A \iff \forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \subset U$*
2. *Si A est un ouvert de E, les ouverts de A sont les intersections des ouverts de E avec A. Ce sont donc des ouverts de E*
3. *Le complémentaire dans A d'un fermé relatif à A est un ouvert relatif à A.*
4. *Si A est un fermé de E, les fermés de A sont les intersections des fermés de E avec A. Ce sont donc des fermés de E*

ATTENTION à cette notion :
- $[0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$
- $]0,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}_+^*$
- Si $A =]0,1] \cup \{2\}$, alors $]0,1]$ est un ouvert de A car $]0,1] = A \cap]0,3/2[$, et c'est aussi un fermé de A car $]0,1] = [0,1] \cap A$.
  Il existe donc des parties non triviales à la fois ouvertes et fermées de A.

Proposition 6.1.58 *Soit $A \subset E$ et $B \subset A$.*
B est un fermé de $A \iff$ toute suite de B qui converge dans A a sa limite dans B.

car ...

6.2 Etude locale : limite d'une fonction en un point

Dans tout ce paragraphe, E et F sont des evn.

6.2.1 Définitions

Définition 6.2.1 *Soit $A \subset E$, $a \in \overline{A}$, $\ell \in F$ et $f : A \to F$.*
On dira que f a pour limite ℓ en a si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$

Lorsqu'on écrit $\|x - a\|$ il s'agit de la norme sur E alors que dans $\|f(x) - \ell\|$ il s'agit de la norme sur F.

Proposition 6.2.2 ***Caractérisation par les voisinages*** *:*
avec les mêmes notations, f a pour limite ℓ en $a \iff$
$\forall V$ voisinage de ℓ, $\exists U$ voisinage de a tq $f(U \cap A) \subset V$.

car ...

Proposition 6.2.3 *Si on change la norme sur E ou celle sur F par une norme équivalente, on ne change pas l'existence et la valeur de la limite.*

Remarque 6.2.4 *On peut remplacer dans la définition les inégalités larges par des inégalités strictes : ce sont des définitions équivalentes*

car ...

Proposition 6.2.5 *Unicité de la limite :*
Avec les mêmes notations, f a pour limite ℓ et ℓ' en $a \Longrightarrow \ell = \ell'$.

car ...

Notation 6.2.6 *f a pour limite ℓ en a se notera* $\lim\limits_{a} f = \ell$

Remarque 6.2.7 ***Important*** *:* $\lim\limits_{a} f = \ell \iff \lim\limits_{a} \|f - \ell\| = 0$

L'importance de cette remarque tient au fait que la seconde limite ($\lim\limits_{a} \|f - \ell\|$) est la limite en a d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

6.2.2 Extension

La définition précédente s'étend aux cas suivants :

— $f : [b, +\infty[\to F$ et $a = +\infty$ ou $a = -\infty$:
$\lim\limits_{+\infty} f = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ tq $\forall x, x > M \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

— $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$:
$\lim\limits_{a} f = +\infty \iff \forall M > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) > M$

— cas où A n'est pas borné :
$\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in A,\ \|x\| > M \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$

6.2.3 Limite suivant une partie

Définition 6.2.8 *Soit $f : A \subset E \to F$ et $P \subset A$. Soit $a \in \overline{P}$ et $\ell \in F$.*
On dira que f a pour limite ℓ quand x tend vers a selon P (en restant dans P) si et seulement si la restriction de f à P a pour limite ℓ en a, i.e.
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in P, \|x - a\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon$
se note $\lim\limits_{x \to a; x \in P} f(x) = \ell$

Cas particulier 6.2.9 .

1. ***Limite par valeurs différentes*** *: C'est le cas où $a \in A$ et $P = A \setminus \{a\}$*
   f a pour limite ℓ en a par valeurs différentes $\Longleftrightarrow$
   $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < \|x - a\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$

   Exemple 6.2.10 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 2$.*
   La représenter. Montrer que f a une limite en 0 par valeurs différentes. Montrer que f n'a pas de limite en 0

2. ***Limite à droite (resp à gauche) en*** *a, dans le cas où $E = \mathbb{R}$.*
   Dans ce cas $P = A \cap]a, +\infty[$.
   f a pour limite ℓ à droite en a $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ 0 < x - a \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leqslant \varepsilon.$

6.2.4 Remarque concernant a

Proposition 6.2.11 ***Que se passe-t-il si $a \in A$?***

$$\lim_a f = \ell \text{ et } a \in A \Longrightarrow \ell = f(a)$$

car ...

6.2.5 Propriétés

Proposition 6.2.12

$$\lim_a f = \ell \Longrightarrow \ell \in \overline{f(A)}$$

car ...

Proposition 6.2.13

$$\lim_a f = \ell \in F \Longrightarrow f \text{ est bornée au voisinage de } a$$

Clair : prendre par exemple $\varepsilon = 1$ dans la définition

6.2.6 Caractérisation par les suites

Théorème 6.2.14 *$f : A \subset E \to F,\ a \in \overline{A},\ \ell \in F.$*
$\lim\limits_a f = \ell \iff (\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim u_n = a \Longrightarrow \lim f(u_n) = \ell)$

car ...

Remarque 6.2.15 *Ce théorème reste vrai dans toutes les situations de limites :* $a \in \overline{A}$, $a = +\infty$, $a = -\infty$ *et* $\ell \in F$, $\ell = +\infty$, $\ell = -\infty$

Remarque 6.2.16 *Ce théorème est très utile pour prouver qu'une fonction n'a pas de limite*

Exemple 6.2.17 $f : x \to \sin x$ *n'a pas de limite en* $+\infty$

Exemple 6.2.18 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *définie par* $z \to e^z$. *Que dire de* $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |e^z|$ *?*

6.2.7 Opérations algébriques

Théorème 6.2.19 E, F *deux evn,* $A \subset E$, $a \in \overline{A}$, $\ell, \ell' \in F$.
$f, g : A \to F$ *et* $\lambda : A \to \mathbb{K}$.

1. $\lim\limits_a f = \ell \Longrightarrow \lim\limits_a \|f(x)\| = \|\ell\|$
2. $\lim\limits_a f = 0 \iff \lim\limits_a \|f\| = 0$
3. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_a f = \ell \\ \lim\limits_a g = \ell' \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_a (f+g) = \ell + \ell'$
4. $\left.\begin{array}{c} \lim\limits_a \lambda = 0 \\ g \text{ bornée au voisinage de } a \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_a \lambda g = 0$
5. $\left.\begin{array}{c} \lim\limits_a g = 0 \\ \lambda \text{ bornée au voisinage de } a \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_a \lambda g = 0$
6. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_a \lambda = \alpha \\ \lim\limits_a g = \ell' \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_a \lambda g = \alpha \ell'$

car ...

Remarque 6.2.20 ***ATTENTION*** *: le produit de 2 fonctions vectorielles n'a en général aucun sens.*

6.2.8 Composition

Théorème 6.2.21 E, F, G *des evn.* $A \subset E, a \in \overline{A}$, $B \subset F$, $f : A \to F$, $g : B \to G$ *avec* $f(A) \subset B$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_a f = b \\ \lim\limits_b g = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_a g \circ f = \ell$$

Tout d'abord, $a \in \overline{A}$ et $\lim\limits_a f = b \Longrightarrow b \in \overline{f(A)} \subset \overline{B}$.
Alors ...

6.2.9 Limites et coordonnées

E, F evn, $A \subset E$ avec $dim(F) = p$, $(u_1, ..., u_p)$ base de F.
$f : A \to F$, avec $f = \sum_{k=1}^{p} f_k u_k$, où les fonctions f_k sont des fonctions $f_k : A \to \mathbb{K}$.

Théorème 6.2.22 $\ell \in F,\ \ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k u_k$, *et soit* $a \in \overline{A}$.

$$\lim_a f = \ell \iff \forall k \in [\![1, k]\!],\ \lim_a f_k = \ell_k$$

Car ...

6.2.10 Espace vectoriel produit

Théorème 6.2.23 *E et $A \subset E$, $F_1, ..., F_p$ des evn. Notons $F = F_1 \times ... \times F_p$.*
Soit $f : A \to F$, $f = (f_1, ..., f_p)$
$\ell \in F$ et soit $\ell = (\ell_1, ..., \ell_p)$, et soit $a \in \overline{A}$.

$$\lim_a f = \ell \iff \forall k \in [\![1, k]\!],\ \lim_a f_k = \ell_k$$

Démonstration à faire (s'inspirer la démonstration précédente)

6.3 Continuité

6.3.1 Généralités

Définition 6.3.1 *$A \subset E$, $f : A \to F$, $a \in A$.*
On dit que f est continue en $a \iff f$ a une limite en a, et alors $\lim_a f = f(a)$.
i.e. f est continue en $a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon$.

Voir 6.2.11

Remarque 6.3.2 *C'est une notion locale. Au lieu de prendre x dans A on peut se contenter de prendre x dans un voisinage de a*

Proposition 6.3.3 *Si on remplace les normes sur E et sur F par des normes équivalentes, la notion de continuité est inchangée.*

Car c'est la propriété 6.2.3 sur les limites.

Théorème 6.3.4 ***Caractérisation par les suites.***
$f : A \to F$ et $a \in A$.

$$f \text{ continue en } a \iff (\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \lim u_n = a \Longrightarrow \lim f(u_n) = f(a)\ )$$

C'est la caractérisation d'une limite par les suites voir 6.2.14

Exemple 6.3.5 *Soit* $f : x \to \begin{cases} \sin(1/x) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$. *Montrons que* f *n'est pas continue en 0.*
Soit $u_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. $\lim u_n = 0$, *mais* $f(u_n) = 1$ *donc* $\lim f(u_n) \neq f(0)$, *ce qui contredirait le théorème si* f *était continue en 0.*

Exemple 6.3.6 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $\left\{ \begin{array}{c} u_0 = 1/2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{array} \right.$. *Étudions la convergence de cette suite.*

1. *En supposant que cette suite converge vers* ℓ, *que dire de* ℓ *?*
2. *Montrer que cette suite converge.*
3. *Conclure.*

Remarque 6.3.7 *Le sens direct de ce théorème est souvent utilisé dans le cas de suites définies sous la forme* $u_{n+1} = f(u_n)$. *Il est aussi souvent utilisé pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.*
Le sens réciproque est plus souvent utilisé dans les démonstrations théoriques.

Définition 6.3.8 f *est continue sur* $A \iff f$ *est continue en tout point de* A.

Remarque 6.3.9 *Cette définition peut être sujette à ambiguïté dans le cas d'une fonction définie sur* A *si on cherche à voir si elle est continue sur une partie* B *de* A.

Exemple 6.3.10 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\begin{cases} f(x) = 0 & si\ x < 0 \\ f(x) = 1 & si\ x \geqslant 0 \end{cases}$. *Comment répondre à la question* f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}_+$ *?*
f *n'est pas continue en 0, donc n'est pas continue en tout point de* $\mathbb{R}_+$. *Cependant, la restriction de* f *à* $\mathbb{R}_+$ *est la fonction constante égale à 1. C'est cette manière de voir qui sera en général adoptée.*
Mais alors f *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et sur* $\mathbb{R}_-^*$, *sans être continue sur* $\mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}$ *...*

Notation 6.3.11 *Pour* $A \subset E$, *on notera* $\mathcal{C}(A, F)$ *l'ensemble des fonctions de* A *dans* F *continues sur* A.

Proposition 6.3.12 f *lipschitzienne sur* $A \Longrightarrow f$ *continue sur* A.

6.3.2 Opérations

Proposition 6.3.13 $A \subset E$, $a \in A$ *et* $f, g : A \to F$.
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ f, g$ *continues en* $a \Longrightarrow \alpha f + \beta g$ *continue en* a.
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ f, g$ *continues sur* $A \Longrightarrow \alpha f + \beta g$ *continue sur* A.

Clair (voir le théorème sur les limites)

Conséquence 6.3.14 $\mathcal{C}(A, F)$ *est un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel.*

Proposition 6.3.15 *Si* $F = \mathbb{K}$, *i.e.* $f, g : A \to \mathbb{K}$, *alors le produit* fg *a un sens.*
Pour $a \in A$, f, g *continues en* $a \Longrightarrow fg$ *continue en* a.
f, g *continues sur* $A \Longrightarrow fg$ *continue sur* A.

Démonstration à faire.

Proposition 6.3.16 *$f : A \to F,\ g : B \to G$ avec $f(A) \subset B$.*

- *Soit $a \in A$,* $\left.\begin{array}{c} f \text{ continue en } a \\ g \text{ continue en } f(a) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f$ *continue en a*
- $\left.\begin{array}{c} f \text{ continue sur } A \\ g \text{ continue sur } f(A) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f$ *continue sur A*

6.3.3 Cas des espaces produits

Proposition 6.3.17 *Soit $F = \prod_{k=1}^{n} F_k$.*

Alors $p_k : \left\{\begin{array}{cl} F & \to F_k \\ x = (x_1, ..., x_n) & \to x_k \end{array}\right.$ *est continue en tout point de F car elle est 1-lipschitzienne.*

Théorème 6.3.18 $f : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F = \prod_{k=1}^{n} F_k \\ x & \to & f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)) \end{array}\right.$. *Ainsi $f_k = p_k \circ f$*

Soit $a \in E$. f continue en $a \iff \forall k,\ f_k$ est continue en a.

Car ...

Exemple 6.3.19
1. *Les fonctions polynomiales de p variables $(\mathbb{K}^p, \|.\|_\infty) \to \mathbb{K}$ sont continues en tout point de $\mathbb{K}^p$ (car produits de fonctions continues sur $\mathbb{K}^p$)*
2. *Les fonctions rationnelles de p variables $(\mathbb{K}^p, \|.\|_\infty) \to \mathbb{K}$ sont continues en tout point de leur ensemble de définition.*

Remarque 6.3.20 *ATTENTION : Dans ce théorème, c'est l'espace d'arrivée qui est un espace produit. Le théorème ne concerne pas le cas où l'espace de départ est un espace produit Voir l'exemple :*

Exemple 6.3.21 *Soit* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}\right.$

1. *Soit $f_1 : x \to f(x, 0)$. Montrer que f_1 est continue en 0.*
2. *Idem pour $f_2 : y \to f(0, y)$.*
3. *Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$ (on pourra utiliser le théorème 6.3.4)*

6.3.4 Cas où F est de dimension finie

Théorème 6.3.22 *Soit $f : A \subset E \to F$ avec $dim(F) = n$, $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base de F et soit $a \in A$*

Pour $x \in A, f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) u_k$ où $f_k : A \to \mathbb{K}$.

$$f \text{ continue en } a \iff \forall k,\ f_k \text{ continue en } a$$

Car ...

Ce théorème dit que pour prouver la continuité de f il est équivalent de prouver la continuité des fonctions coordonnées. On peut donc se ramener à des fonctions de E dans $\mathbb{K}$.

6.3.5 Des exemples de fonctions continues

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et $l \in [\![1,p]\!]$
   $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to \mathbb{K} \\ A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} & \to a_{k,l} \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ Car si on choisit la norme infinie sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application est 1-lipschitzienne.
   On pourrait aussi dire que c'est une fonction coordonnée de l'application identité.
2. $\begin{cases} \mathbb{K}\times\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) & \to \lambda A \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{K}\times\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   Car ..
3. $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2 & \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \to A+B \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$
   Car ...
4. $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \to AB \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$
   Car ...
5. $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \to^t A \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
   Car ...
6. $\begin{cases} \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) & \to \mathbb{K} \\ A & \to tr(A) \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})$.
   Car ...
7. $\begin{cases} \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) & \to \mathbb{K} \\ A & \to det(A) \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})$.
   Car ...

Exercice 6.3.23 *Montrer que l'application* $\begin{cases} GL_n(\mathbb{K}) & \to GL_n(\mathbb{K}) \\ A & \to A^{-1} \end{cases}$ *est continue sur* $GL_n(\mathbb{K})$

On pourra utilement utiliser la comatrice ...

6.3.6 Continuité globale sur A

Rappel : $\mathcal{C}(A, F)$ est un espace vectoriel.

Théorème 6.3.24 *Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$.*

f continue sur A $\iff$ l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A
$\iff$ l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé relatif de A

Car ...

Exemple 6.3.25

1. *$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy < 2\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, $f : (x,y) \to xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Or $A = f^{-1}(]-\infty, 2[)$ et $]-\infty, 2[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc A est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue, ce qui prouve que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*
2. *$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Car ...*
3. *$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y < \dfrac{1}{x}\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Car ...*
4. *Montrer que $D = \{x \in \mathbb{R}^* / \sin(1/x) = 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^*$.
   Montrer que D n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.*
5. *Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

ATTENTION : l'image directe d'un ouvert (resp fermé) n'est pas nécessairement un ouvert (resp fermé) de l'espace d'arrivée.

Exemple 6.3.26

1. sin *est continue sur $\mathbb{R}$ et $]0, 2\pi[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Mais $\sin(]0, 2\pi[) = [-1, 1]$ qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$, c'est même un fermé.*
2. *$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \to 1/x \end{cases}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Donner un fermé de $]0, +\infty[$ dont l'image n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.*

6.3.7 Densité

Théorème 6.3.27 *Soient $f, g : A \to F$ continues sur A et soit X une partie dense dans A.*
$\forall x \in X, f(x) = g(x) \Longrightarrow \forall x \in A,\ f(x) = g(x)$,
i.e. si f et g continues sur A coincident sur une partie dense de A, alors elles sont égales.

Car ...

Exercice 6.3.28 *Le but de cet exercice est de montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j}$. Considérons $f : x \to det(A - xI_n)$. Montrer que f est une fonction polynomiale de degré n sur $\mathbb{K}$.*
2. *En déduire que f a un nombre fini de racines.*
3. *Montrer $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{K},\ 0 < |x| < \alpha \Longrightarrow f(x) \neq 0$.*
4. *Construire alors une suite $(A_p)_p \in GL_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim A_p = A$. Conclure.*

6.3.8 Continuité uniforme

Définition 6.3.29 *$A \subset E,\ f : A \to F$.*
On dit que f est uniformément continue sur A $\Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall x, y \in A,\ \|x - y\| \leqslant \alpha \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 6.3.30 *Écrire la définition de f n'est pas uniformément continue sur A.*

Exemple 6.3.31 *Soit $A \subset E$. la fonction $f : \begin{cases} A & \to \mathbb{R} \\ x & \to d(x, A) \end{cases}$ est uniformément continue sur A.*

Car ...

Proposition 6.3.32 *La propriété de continuité uniforme est conservée si on remplace la norme sur A ou sur F par une norme équivalente.*

Démonstration à rédiger ...

Proposition 6.3.33 *f uniformément continue sur $A \Longrightarrow f$ continue sur A*

car ...

Proposition 6.3.34 *f lipschitzienne sur $A \Longrightarrow f$ uniformément continue sur A*

car ..

Ceci nous fournit beaucoup de fonctions uniformément continues sur A.

Remarque 6.3.35 *La réciproque de cette propriété est fausse : on verra un peu plus tard des fonctions uniformément continues sur un intervalle I qui ne sont pas lipschitziennes sur I.*

Exercice 6.3.36 .

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ uniformément continue sur }]a,b] \\ f \text{ uniformément continue sur } [b,c[\end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ uniformément continue sur }]a,c[$$

Car ...

Théorème 6.3.37 *S'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim(x_n - y_n) = 0$ et la suite $(f(x_n) - f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors f n'est pas uniformément continue sur A.*

Car ...

Exemple 6.3.38

1. *$f : x \to x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, quoique continue.*
   Le prouver en prenant $x_n = n$ et $y_n = n + \dfrac{1}{n}$
2. *Montrer que $f : x \to \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ quoique bornée sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 6.3.39 ***Composition***
Soit f uniformément continue de A dans F et g uniformément continue de B dans G avec $f(A) \subset B \subset F$. Alors $g \circ f$ est uniformément continue de A dans G.

Faites la démonstration.

6.3.9 Continuité des applications linéaires

Théorème 6.3.40 *E et F deux evn, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est uniformément continue sur E.*
2. *f est continue sur E*
3. *f est continue en 0.*
4. *f est bornée sur $B_f(O_E, 1)$ (boule fermée unité).*
5. *f est bornée sur la sphère unité.*

6. $\exists k > 0, \forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant k\|x\|$

Car ...

Notation 6.3.41 *On notera $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F continues.*
On notera $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E continus.

Exemple 6.3.42 *1. Soit* $\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^0([O,1],\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ f & \to \displaystyle\int_0^1 f \end{cases}$. *On munit* $E = \mathcal{C}^0([O,1],\mathbb{R})$ *de la norme infinie.*
Alors φ est continue de E dans $\mathbb{R}$ car ...

2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|P\| = Sup\{|P(t)|\,/t \in [0,1]\}$. Montrer que $\|.\|$ est bien une norme sur E.
Soit $\varphi : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ P & \to P(2) \end{cases}$. *$\varphi$ est clairement linéaire.*
— *On considère la suite $(P_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $\forall n,\ P_n = X^n$. Déterminer $\|P_n\|$.*
— *L'application φ est-elle continue sur E ?*

Théorème 6.3.43 *E, F, G trois evn sur $\mathbb{K}$, $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire.*
B continue sur $E \times F \iff \exists k \geqslant 0, \forall x, y \in E \times F,\ \|B(x,y)\| \leqslant k\|x\|\,\|y\|$ où $E \times F$ est muni de la norme infinie relative aux normes de E et F.

Car ...

Conséquence 6.3.44 *E espace préhilbertien réel.*
$\varphi : \begin{cases} E \times E & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \to < x, y > \end{cases}$ *est continue (Cauchy-Schwarz)*

6.4 Compacité

Il s'agit ici de généraliser la propriété de Bolzano-Weierstrass rencontrée dans le chapitre sur les suites réelles.

6.4.1 Définition séquentielle

Définition 6.4.1 *E un evn, et $C \subset E$.*
C est un compact de $E \iff$ toute suite de C possède au moins une valeur d'adhérence dans C.
*i.e. $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}},\ \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tq la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ converge **dans** C.*

Proposition 6.4.2 *Si C est compact, alors toutes les valeurs d'adhérence des suites de C sont dans C.*

car ...

Exemple 6.4.3 *1. Tout segment de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$, mais ce ne sont pas les seuls : une réunion de 2 segments est encore un compact de $\mathbb{R}$ (on va le voir au-dessous)*

2. $\mathbb{R}$ n'est pas compact : prendre par exemple la suite $(n)_n$.

3. Un singleton est un compact.

Proposition 6.4.4 *Une réunion finie de parties compactes de E est un compact de E.*

Car ...

Conséquence 6.4.5 *1. Une réunion finie de segments de $\mathbb{R}$ est un compact de $\mathbb{R}$.*

2. Toute partie finie de E est un compact.

Proposition 6.4.6 *$\forall k \in [\![1, p]\!]$, C_k compact de l'evn E_k.*
Alors $\prod_{k=1}^{p} C_k$ est un compact de $E = \prod_{k=1}^{p} E_k$ pour la topologie produit.

Car ...

6.4.2 Fermeture et compacité

Théorème 6.4.7 *C compact de $E \Longrightarrow \begin{cases} C & \text{fermé} \\ C & \text{borné} \end{cases}$*

Car ...

Théorème 6.4.8 *Soit C un compact et $F \subset C$.*
F fermé de $E \iff F$ compact de E.

Car ...
ATTENTION. Ne pas faire dire à ce théorème plus qu'il n'en dit : un fermé de E n'est pas toujours un compact (comme on le voit dans le théorème 6.4.7), ici ne pas oublier l'hypothèse "F est inclus dans un compact".

Théorème 6.4.9 *C compact de E, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$.*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a 1 et 1 seule valeur d'adhérence}$$

Un sens est évident. Lequel ?
Montrons l'autre sens ...

6.4.3 Continuité et compacité

Théorème 6.4.10 *E, F deux evn, C compact de E et $f : C \to F$.*
f continue sur $C \Longrightarrow f(C)$ compact de F.
i.e. l'image d'un compact par une application continue est un compact.

Car ...
ATTENTION. On ne sait rien sur l'image réciproque d'un compact par une application continue, comme le montre l'exemple suivant : $f = \sin$, $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$ qui n'est pas compact alors que $[-1,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Théorème 6.4.11 *C compact de E et $f : C \to \mathbb{R}$ continue sur C (fonction à valeurs réelles) Alors f est bornée sur C et atteint ses bornes, i.e.*
$\exists a \in C$ tel que $f(a) = \underset{C}{Inf}(f)$ et $\exists b \in C$ tel que $f(b) = \underset{C}{Sup}(f)$

Car ...
Ce théorème est fondamental : il permet de montrer que la borne sup de C vérifie les propriétés caractérisant C.

Exemple 6.4.12 *C un compact de E et $a \in E$. Alors $\exists x_0 \in C$ tel que $d(a, C) = \|a - x_0\|$.*
En effet, prenons $f : \begin{cases} C & \to \mathbb{R} \\ x & \to \|x - a\| \end{cases}$. f est continue sur C avec C compact, donc f est bornée et atteint son minimum. D'où ...

Conséquence 6.4.13 *C compact et $f : C \to E$ continue. Alors l'application $x \to \|f(x)\|$ est continue, bornée et atteint ses bornes*

Clair.

Théorème 6.4.14 ***Théorème de Heine***
C compact et $f : C \to F$.

$$f \text{ continue sur } C \Longrightarrow f \text{ uniformément continue sur } C$$

Car ...

Exemple 6.4.15 *La fonction racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ car uniformément continue sur $[0,1]$ par le théorème de Heine, et uniformément continue sur $[1, +\infty[$ (à prouver).*
Montrer que cette fonction n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.
On dispose donc ici d'un exemple de fonction uniformément continue et non lipschitzienne, prouvant que la réciproque de la propriété 6.3.34 est fausse.

6.5 Connexité par arcs

6.5.1 Chemin continu joignant deux points

Définition 6.5.1 *Soit $A \subset E$ et $a, b \in A$.*
On appelle chemin continu de A joignant a et b toute application u vérifiant

$$u : [0,1] \to A$$
$$u \text{ continue sur } [0,1]$$
$$u(0) = a \text{ et } u(1) = b$$

Exemple 6.5.2 *Si A est convexe et a, b deux point de A. L'application $\begin{cases} [0,1] & \to A \\ t & \to (1-t)a + tb \end{cases}$ est un chemin continu de A joignant a et b.*

Proposition 6.5.3 *On définit une relation entre les points de A par*
pour a et b dans A, $a\mathcal{R}b \iff$ il existe un chemin continu de A joignant a et b
Cette relation est une relation d'équivalence sur A.

car ...

Définition 6.5.4 *Les classes d'équivalence par cette relation sont appelées composantes connexes par arcs de A.*

Proposition 6.5.5 *Les composantes connexes par arcs de A forment une partition de A.*

car ...

6.5.2 Parties connexes par arcs

Définition 6.5.6 *Soit $A \subset E$. On dira que A est connexe par arcs si et seulement si, $\forall a, b \in A$ il existe un chemin continu joignant a et b dans A.*

Remarque 6.5.7 *Aconnexe par arcs $\iff$ A possède 1 seule composante connexe par arcs.*

Proposition 6.5.8

$$A \text{ convexe } \Longrightarrow A \text{ connexe par arcs}$$

C'est ce qu'on a vu dans l'exemple 6.5.2
Mais la réciproque est fausse :

Autre contre exemple : la **sphère** unité est connexe par arcs mais pas convexe.

Définition 6.5.9 *Soit $A \subset E$. On dira que A est étoilé si et seulement si*

$$\exists a \in A, \forall x \in A, [a, x] \subset A.$$

Exemple 6.5.10 .

Proposition 6.5.11 *A étoilé $\Longrightarrow A$ connexe par arcs.*

Car ...

Théorème 6.5.12 *Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Car ...

6.5.3 Connexité par arcs et continuité

Théorème 6.5.13 $\left.\begin{array}{c} A \textit{ connexe par arcs} \\ f : A \to F \textit{ continue} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(A)$ *connexe par arcs.*

car ...

Conséquence 6.5.14 $\left.\begin{array}{c} A \textit{ connexe par arcs} \\ f : A \to \mathbb{R} \textit{ continue} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(A)$ *intervalle de* $\mathbb{R}$.

car $f(A)$ connexe par arcs de $\mathbb{R}$ donc intervalle.

Conséquence 6.5.15 .

$$\left.\begin{array}{c} A \textit{ connexe par arcs} \\ f : A \to \mathbb{R} \textit{ continue} \\ a, b \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall m \textit{ entre } f(a) \textit{ et } f(b), \exists c \in A \textit{ tel que } f(c) = m.$$

Car ...

Exemple 6.5.16 1. $GL_n(\mathbb{R})$ *n'est pas connexe par arcs. En effet, l'application* $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ *est continue et surjective, mais son image n'est pas connexe par arcs. Donc l'ensemble de départ n'est pas connexe par arcs.*

2. $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$ *est connexe par arcs. Dire pourquoi.*

6.6 Cas des espaces vectoriels de dimension finie

6.6.1 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 6.6.1 *Rappel : E un evn de dimension finie. Alors toute suite bornée de E possède une valeur d'adhérence.*

6.6.2 Des conséquences

Théorème 6.6.2 *Une partie d'un evn de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.*

Un sens a déjà été prouvé. dire lequel.
Montrons l'autre sens ...

Conséquence 6.6.3 *Une suite bornée d'un evn de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Car ...

6.6.3 Sev de dimension finie

Théorème 6.6.4 *E un evn et F un sev de E de dimension finie. Alors F est fermé.*

Car ...

6.6.4 Continuité

Théorème 6.6.5 *E espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie)*

$$f \in \mathcal{L}(E,F) \Longrightarrow f \text{ continue sur } E$$

i.e. toute application linéaire de E de dimension finie vers F est continue.

Car ...

Conséquence 6.6.6 $dim(E) < +\infty \Longrightarrow L_c(E,F) = L(E,F)$

Exemple 6.6.7

1. *On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\| = Sup\{|P(x)| \,/x \in [0,1]\}$. Soit D : $\begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R}[X] \\ P & \to P' \end{cases}$. En considérant les polynômes $P_n = X^n/n$ montrer que D n'est pas continue.*
2. *Montrer que la dérivation est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$*

Théorème 6.6.8 *$E_1, ..., E_p$ des evn de dimension finie, et F un evn.*
$f : E_1 \times ... \times E_p \to F$ application p-linéaire, alors f est continue

Car ...

Exemple 6.6.9

1. *On redémontre ainsi que l'application déterminant est continue sur E^n.*
2. *On redémontre aussi que l'application $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \to \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \to AB \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$*