Chapitre 3

Espaces vectoriels normés

3.1 Vocabulaire des evn

3.1.1 Norme

Dans toute la suite E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$..

Définition 3.1.1 *Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que*

1. *Positivité : i.e. $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ (voir ensemble d'arrivée de N)*
2. *Séparation : $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$*
3. *Homogénéité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$*
4. *Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$*

Remarque 3.1.2 *Dans 3, si on prend $\lambda = 0$ alors on voit que $N(0_E) = 0$.*
Donc dans 2., la réciproque est toujours vraie : $x = 0 \Longrightarrow N(x) = 0$.

Proposition 3.1.3 $\forall x \in E$, $N(-x) = N(x)$

Clair

Exemple 3.1.4 *1. $E = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. alors la valeur absolue est une norme*
2. $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors le module est une norme

Exemple 3.1.5 *$E = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*
1. $N_2 : (x, y) \to \sqrt{x^2 + y^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ appelée norme euclidienne
2. $N\infty : (x, y) \to Max(|x|, |y|)$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$
3. $N_1 : (x, y) \to |x| + |y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$

Définition 3.1.6 *Un espace vectoriel normé (evn)est un couple (E, N) où E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et N une norme sur E.*

Définition 3.1.7 *(E, N) un evn et $x \in E$. x est dit unitaire (ou normé) si et seulement si $N(x) = 1$.*

Proposition 3.1.8 *Si $x \neq 0$ alors $\dfrac{x}{N(x)}$ est unitaire*

car ...

Proposition 3.1.9 ***Inégalités triangulaires***
1. $\forall x_1, ..., x_n \in E,\ N(x_1 + .. + x_n) \leqslant N(x_1) + ... + N(x_n)$
2. $\forall x, y \in E,\ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$

car ...

Remarque 3.1.10 *La seconde inégalité triangulaire s'écrit aussi :*
$\forall x, y \in E,\ |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y) \leqslant N(x) + N(y)$

3.1.2 Distance associée à une norme

Définition 3.1.11 *Soit E un espace vectoriel. On appelle distance sur E toute application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que*

1. *positivité :* $\forall x, y \in E,\ d(x, y) \geqslant 0$ *(clair vu l'ensemble d'arrivée de d)*
2. *séparation :* $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$
3. *symétrie :* $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = d(y, x)$
4. *Inégalité triangulaire :* $\forall x, y, z \in E,\ d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$

Définition-propriété 3.1.12 *Soit (E, N) un evn. L'application $E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par $(x, y) \to N(x - y)$ est une distance sur E appelée distance associée à N.*

car ...

3.1.3 Boules

Définition 3.1.13 *Soit (E, N) un evn, $a \in E$ et $r > 0$*

1. *La boule ouverte de centre a et de rayon r est le sous-ensemble*
$$B_o(a, r) = \{x \in E / N(x - a) < r\}$$
2. *La boule fermée de centre a et de rayon r est le sous-ensemble*
$$B_f(a, r) = \{x \in E / N(x - a) \leqslant r\}$$
3. *La sphère de centre a et de rayon r est le sous-ensemble*
$$S(a, r) = \{x \in E / N(x - a) = r\}$$

Si $a = 0$ et $r = 1$ on parle alors de boule ouverte (ou sphère) unité.

Remarque 3.1.14 *La notation $B(a, r)$ sans précision sur le fait que c'est une boule fermée ou ouverte désigne usuellement la boule ouverte.*

Exemple 3.1.15 *Représenter dans la cas où $E = \mathbb{R}^2$ la boule ouverte unité dans les cas suivants (voir exemple 3.1.5)*

— *La norme est N_2*

— *La norme est* N_∞

— *La norme est* N_1

Exercice 3.1.16 *Notons ici* $B_k(a,r)$ *la boule ouverte pour la norme* N_k*, alors*
$B_1(0,1) \subset B_2(0,1) \subset B_\infty(0,1) \subset B_2(0,\sqrt{2})$

Exercice 3.1.17 *Soit* $b \in B(a,r)$*. Montrer qu'il existe* $\rho > 0$ *tel que* $B(b,\rho) \subset B(a,r)$

3.1.4 Parties bornées de $\mathbb{R}$ (rappels)

Définition 3.1.18 *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$ *On dira que* A *est majorée si et seulement si* $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \leqslant M$*. Le réel* M *est alors appelé majorant de* A
On dira que A *est minorée si et seulement si* $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \geqslant m$*. Le réel* m *est alors appelé minorant de* A
On dira que A *est bornée si et seulement si* A *est à la fois majorée et minorée.*

Remarque 3.1.19 *Dans le cas où* A *est majoré, le majorant de* A *n'est pas unique, car si* M *majore* A*, alors tout réel* $M' > M$ *est aussi majorant de* A*.*

Écrire cette remarque dans le cas où A est minoré.

Théorème 3.1.20 ***Parties bornées de*** $\mathbb{R}$
Soit $A \subset \mathbb{R}$*.* A *est bornée* $\iff \exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ |a| \leqslant M$

car ...
Théorème important, qui permet de se ramener à des réels positifs plus facilement manipulables dans les inégalités.

Définition 3.1.21 ***Borne sup et borne inf***
Soit $A \subset \mathbb{R}$ *et* M *un réel.*
On dira que M *est borne sup de* A*, noté* $M = sup(A)$ *si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{c} M \text{ majore } A \\ \text{et} \\ \forall M' \in \mathbb{R},\ M' < M \Longrightarrow M' \text{ ne majore pas } A \end{array} \right.$$

On dira que m *est borne inf de* A*, noté* $m = inf(A)$ *si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

(compléter)

Proposition 3.1.22 *Soit* $A \subset \mathbb{R}$*.* $M = sup(A) \iff \left\{ \begin{array}{c} \forall a \in A,\ a \leqslant M \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A, M - \varepsilon < a \end{array} \right.$

car ...

Théorème 3.1.23 ***Propriété fondamentale de*** $\mathbb{R}$.
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ *admet une borne sup.*
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ *admet une borne inf.*

3.1.5 Parties bornées d'un evn

Définition 3.1.24 *Soit* (E, N) *un evn et* $A \subset E$.

$$\text{On dira que } A \text{ est bornée pour la norme } N \iff \exists M > 0,\ \forall a \in A, N(a) \leqslant M$$
$$\iff \exists M > 0,\ A \subset B_f(0, M)$$

Proposition 3.1.25 (E, N) *un evn et* A *et* B *des parties de* E.

1. $A \subset B$ *et* B *bornée* $\Longrightarrow A$ *bornée (une partie d'un ensemble borné est bornée)*
2. *Une réunion finie de parties bornées est bornée*
3. *Une intersection quelconque de parties bornées est bornée*
4. *Les boules et les sphères sont bornées.*

car ...

Exemple 3.1.26 *Donner un exemple de famille infinie de parties bornées dont la réunion n'est pas bornée*

ATTENTION La notion de partie bornée dépend de la norme.

Exemple 3.1.27 *Prenons ici* $E = \mathbb{R}[X]$.
Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *on pose* $N(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ *et* $N'(P) = Max\{|a_k| \,/ k \in \mathbb{N}\}$.

1. *Montrer que* N *et* N' *sont des normes sur* $\mathbb{R}[X]$
2. *Soit* B *la boule unité fermée pour la norme* N'. *Montrer que* B *n'est pas bornée pour la norme* N *(on pourra considérer les polynômes* $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$ *quand* n *décrit* $\mathbb{N}^*$*).*

Définition-théorème 3.1.28 *Soit* (E, N) *un evn et* A *une partie non vide et bornée de* E.
L'ensemble $\{N(x - y)/x, y \in A\}$ *admet une borne sup qui est appelée diamétre de* A *et notée* $diam(A)$.

$$diam(A) = Sup\{N(x - y)/x, y \in A\}$$

car ...

Exemple 3.1.29 *1. Ici* $E = \mathbb{R}$ *et* $A =]a, b[$. *Déterminer* $diam(A)$
2. $E = \mathbb{R}^2$ *muni de la norme* N_2. *Quel est la diamètre de la boule unité fermée ? et de la boule unité ouverte ?*

Exercice 3.1.30 *Soit* (E, N) *un evn. Montrer que* $diam(B(a, r)) = 2r$

Remarque 3.1.31 $diam(A)$ *n'est pas nécessairement atteint, i.e. rien ne dit qu'il existe* a *et* b *dans* A *tels que* $diam(A) = N(a - b)$. *Voir les exemples ci-dessus*

Définition 3.1.32 *Soit* X *un ensemble et* $f : X \to E$.

$$\text{On dit que } f \text{ est bornée sur } X \iff f(X) \text{ est une partie bornée de } E$$
$$\iff \exists M > 0, \forall x \in X,\ N(f(x)) \leqslant M$$

3.1.6 Fonctions lipschitziennes

Définition 3.1.33 *Soit (E,N) et (E',N') deux evn, A une partie de E et $f : A \to E'$. Soit enfin $k > 0$.*
*f est dite **lipschitzienne de rapport** k sur A $\iff \forall x,y \in A,\ N'(f(x)-f(y)) \leqslant kN(x-y)$*
*On dit aussi que f est $k-$**lipschitzienne***
*On dit que f est **lipschitzienne** $\iff \exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f est $k-$lipschitzienne*
*On dit que f est **contractante** $\iff \exists k$ tel que $0 < k < 1$ et f est $k-$lipschitzienne*

ATTENTION : $\forall x,y \in A$, tq $x \neq y, N'(f(x)-f(y)) < N(x-y)$ ne conduit pas à f contractante. Rien ne dit en effet qu'on va pouvoir trouver $k < 1$ tel que f est $k-$lipschizienne.

Exemple 3.1.34 *Sur $\mathbb{R}$ prenons $f : x \to \sqrt{x^2+1}$*
1. Montrer que $\forall x,y \in \mathbb{R}, x \neq y \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < |x-y|$
2. En considérant les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_n = n$ et $y_n = n+1$ montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists N,\ \forall n \geqslant N,\ |f(x_n)-f(y_n)| \geqslant (1-\varepsilon)|x_n-y_n|$
3. Conclure que f n'est pas contractante.

Proposition 3.1.35 *Soit (E,N) et (E',N') deux evn, A une partie de E, $f : A \to E'$ et $g : A \to E'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*
$f$et g lipschitziennes $\Longrightarrow f+g$ lipschitzienne et λf lipschitzienne.
i.e. l'ensemble des fonctions lipschitziennes de A dans E' est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,E')$.

car ...

Proposition 3.1.36 *(E,N) un evn. Alors l'application N est 1 lipschitzienne*

car ...

Théorème 3.1.37 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ avec f dérivable sur I.*
f lipschitzienne sur $I \iff f'$ est bornée sur I.

car ...

3.1.7 Distance d'un point à une partie de E.

Définition 3.1.38 *Soit (E,N) un evn, A une partie non vide de E et $x \in E$.*
On définit la distance de x à A, notée $d(x,A)$ par :

$$d(x,A) = inf\{N(x-a)/a \in A\}$$

Cette borne inf existe car ...

Remarque 3.1.39 *Encore une fois, il s'agit d'une borne inf, pas d'un minium, i.e. rien ne dit qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x,A)$ serait égal à $d(x,a)$*

Exemple 3.1.40 *Sur $\mathbb{R}$ avec $A =]0,1[$. Alors $d(4,A) = 3$ mais $\forall a \in A, d(4,a) > 3$.*
De même $d(0,A) = 0$ mais pourtant $0 \notin A$.

Retenons donc

$$d(x,A) = 0 \not\Rightarrow x \in A$$

$$d(x,A) = r \not\Rightarrow \exists y \in A,\ d(x,y) = r$$

Théorème 3.1.41 *Soit $A \subset E$ et $x \in E$.*

1. $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *tq* $d(x,A) = \lim_n N(x-a_n)$
2. $d(x,A) = 0 \iff \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *tq* $\lim_n N(x-a_n) = 0$

car ...

Théorème 3.1.42 *Soit $A \subset E$ et $x \in E$.*
L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & d(x,A) \end{array} \right.$ *est 1 lipschitzienne*

car ...

3.1.8 Algèbres normées

Rappelez ce qu'est un algèbre sur le corps $\mathbb{K}$.

Définition 3.1.43 *Soit A une $\mathbb{K}-$algèbre et N une norme sur l'espace vectoriel A.*
On dit que N est une norme d'algèbre si et seulement si $\forall x, y \in A,\ N(xy) \leqslant N(x)N(y)$

Conséquence 3.1.44 *Si N est une norme d'algèbre, alors $\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N},\ N(a^n) \leqslant N(a)^n$*

3.2 Exemples d'evn

3.2.1 evn de dimension finie

3.2.1.1 $E = \mathbb{R}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

On dispose de trois normes classiques

1. La norme 1, $N_1 : x = (x_1, ..., x_p) \to \sum_{k=1}^{p} |x_k|$. C'est bien une norme car ...
   $N_1(x)$ se note aussi $\|x\|_1$
2. La norme 2 ou norme euclidienne, $N_2 : x = (x_1, ..., x_p) \to \sqrt{\sum_{k=1}^{p} {x_k}^2}$. C'est bien une norme car ...
   $N_2(x)$ se note aussi $\|x\|_2$
3. La norme infinie, $N_\infty : x = (x_1, ..., x_p) \to max\{|x_k| / 1 \leqslant k \leqslant p\}$. C'est bien une norme car ...
   $N_\infty(x)$ se note aussi $\|x\|_\infty$

3.2.1.2 $E = \mathbb{C}^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

On dispose là encore de trois normes classiques

1. La norme 1, $N_1 : z = (z_1, ..., z_p) \to \sum_{k=1}^{p} |z_k|$. C'est bien une norme car ...
   $N_1(z)$ se note aussi $\|z\|_1$

2. La norme 2, $N_2 : z = (z_1, ..., z_p) \to \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |z_k|^2}$. C'est bien une norme car ...
   $N_2(z)$ se note aussi $\|z\|_2$
3. La norme infinie, $N_\infty : z = (z_1, ..., z_p) \to max\{|z_k| / 1 \leqslant k \leqslant p\}$. C'est bien une norme car ...
   $N_\infty(z)$ se note aussi $\|z\|_\infty$

3.2.1.3 E espace vectoriel de dimension p

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Pour $x \in E$ notons $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$

On définit une fois encore les normes N_1, N_2, N_∞ associées à la base $\mathcal{B}$ en posant :

1. $N_1(x) = \sum_{k=1}^{p} |x_k|$. C'est bien une norme car ...
   $N_1(x)$ se note aussi $\|x\|_1$
2. $N_2(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2}$. C'est bien une norme car ...
   $N_2(x)$ se note aussi $\|x\|_2$
3. $N_\infty(x) max\{|x_k| / 1 \leqslant k \leqslant p\}$. C'est bien une norme car ...
   $N_\infty(x)$ se note aussi $\|x\|_\infty$

ATTENTION ces normes sur un espace vectoriel dépendent de la base. En fait, par exemple la norme N_1 associée à la base $\mathcal{B}$ devrait être notée $N_{1,\mathcal{B}}$ ... Mais s'il n'y a pas d'ambiguïté on se dispense de noter la base.

3.2.1.4 Projections canoniques

Définition 3.2.1 *L'application p_k définie par $p_k \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K} \\ (x_1, ..., x_n) & \to x_k \end{cases}$ est appelée kième projection canonique de $\mathbb{K}^n$ sur $\mathbb{K}$.*

Proposition 3.2.2 *p_k est linéaire et $1-$lipschitzienne de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{K}, |.|)$*

car ...

3.2.2 $E = \mathbb{K}[X]$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. P se note aussi $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ en posant $\forall k \geqslant n+1,\ a_k = 0$.

Plus généralement tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant un nombre fini de termes non nuls.

On définit quelques normes sur $\mathbb{K}[X]$:

1. $\|.\|_1$ par $\|P\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$; cette somme est finie, donc $\|P\|_1$ a bien un sens. $\|.\|_1$ est bien une norme car ...

2. $\|.\|_\infty$ par $\|P\|_\infty = max\{|a_k| / k \in \mathbb{N}\}$; ce maximum existe car il y a un nombre fini de a_k non nuls, donc $\|P\|_\infty$ a bien un sens. $\|.\|_\infty$ est bien une norme car ...
3. Soit a et b réels tels que $a < b$. $\|.\| : P \to \displaystyle\int_a^b |P(t)|\, dt$ est bien une norme sur $\mathbb{K}[X]$.
   Prouvez le
4. $\|.\| : P \to \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \left|P^{(k)}(0)\right|$. Justifiez que $\|P\|$ a bien un sens et montrer que $\|.\|$ est bien une norme.

3.2.3 Espace des fonctions bornées

Définition-théorème 3.2.3 *Soit X un ensemble non vide, et $(E, \|.\|)$ un evn. On note $\mathcal{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans E. Alors*
1. $\mathcal{B}(X,E)$ est un sev de $\mathcal{F}(X,E)$ et
2. L'application N_∞ : $\begin{cases} \mathcal{B}(X,E) & \to \mathbb{R} \\ f & \to \sup\{\|f(x)\| / x \in X\} \end{cases}$ est une norme, appelée norme de la convergence uniforme.

En effet ...

3.2.4 Espace des fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a < b$

On sait que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.
On définit quelques normes usuelles sur cet espace :

1. Norme de la convergence en moyenne définie par $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\, dt$
2. Norme de la convergence uniforme (ou norme infinie) définie par
   $\|f\|_\infty = sup\{|f(x)| / x \in [a,b]\}$.
3. Norme de la convergence quadratique définie par : $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\, dt}$.

Ce sont bien des normes car ...

Exemple 3.2.4 *On prend $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et on considére*
$A = \{f_n \in E/$ pour $n \in [\![2,+\infty[\![, f_n$ affine sur chacun des intervalles $[0,1/n],[1/n,2/n],[2/n,1]$ avec $f_n(0) = 0, f_n(1/n) = \sqrt{n}, f_n(2/n) = 0, f_n(1) = 0\}$

1. *Tracer l'allure des courbes des fonctions f_n.*
2. *Déterminer $\|f_n\|_\infty$ et $\|f_n\|_1$*
3. *A est-il borné pour chacunes de ces deux normes ?*

3.2.5 Produit fini d'evn

Soit (E_k, N_k) une famille d'evn avec $1 \leqslant k \leqslant p$. Notons $E = E_1 \times ... \times E_p$
On définit trois normes sur cet espace vectoriel produit ainsi : pour $u = (u_1, .., u_p) \in E$,

1. La norme 1 : $\|(u_1, ..., u_p)\|_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} N_k(u_k)$

2. La norme 2 : $\|(u_1, ..., u_p)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} N_k(u_k)^2}$
3. La norme infinie : $\|(u_1, ..., u_p)\|_\infty = max\{N_k(u_k)/1 \leqslant k \leqslant p\}$

Ces trois applications sont bien des normes ...

3.2.6 Espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ Voici quelques exemples de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\|A\|_\infty = \text{Max}\{|a_{i,j}|/1 \leqslant i, j \leqslant n\}$
2. $\|A\|_1 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$
3. Vous avez vu en Mpsi que l'application $(A, B) \to tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire. On en déduit que $N : A \to \sqrt{tr({}^tA.A)}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, norme euclidienne

Ce sont effectivement des normes.

Reprenons la norme infinie.

Exercice 3.2.5 *1. Montrer que* $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \|AB\|_\infty \leqslant n\,\|A\|_\infty\,\|B\|_\infty$
2. En déduire une constante C *telle que* $N = C\,\|.\|_\infty$ *est une norme d'algèbre sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3.3 Suites d'un evn

3.3.1 Suites

Définition 3.3.1 *Soit* E *un ensemble. Une suite de* E *est une application* $u : \begin{cases} \mathbb{N} & \to E \\ n & \to u(n) \end{cases}$
L'image $u(n)$ *se note souvent* u_n
La suite u *se note aussi* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou, s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté* (u_n)
L'ensemble des suites de E *se note* $E^{\mathbb{N}}$

3.3.2 Convergence

Définition 3.3.2 *Soit* (u_n) *une suite de l'evn* $(E, \|.\|)$ *et soit* $\ell \in E$.
On dira que la suite (u_n) *converge vers* ℓ *pour la norme* $\|.\|$ *si et seulement si la suite réelle* $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0, i.e.*

$$\iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

$$\iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in B_f(\ell, \varepsilon)$$

i.e. $\forall\varepsilon$, hors de la boule $B_f(\ell, \varepsilon)$ il y a un nombre fini de termes de la suite.

Remarque 3.3.3 *On peut écrire une inégalité stricte dans la définition :*

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

car ...

Exemple 3.3.4 1. *La suite réelle* (u_n) *définie par* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1+1/n)^n$.
Montrer que cette suite converge et donner sa limite.

2. *La suite complexe* (u_n) *définie par* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ *avec* $\theta \in \mathbb{R}$
Montrer que cette suite converge et donner sa limite.

3. *La suite matricielle* (A_n) *définie par* $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \begin{pmatrix} 1+1/n & \cos(1/n) \\ \sin(n)/n & e^{n\sin(1/n)} \end{pmatrix}$.
Montrer que cette suite converge pour la norme $\|.\|_1$ *et donner sa limite.*

4. *dans* $\mathcal{C}([0,1/2],\mathbb{R})$ *on considère la suite* (f_n) *définie par* $f_n : x \to x^n$.
Montrer que la suite de fonctions (f_n) *converge pour la norme infinie vers la fonction nulle.*

3.3.3 Suites bornées

Définition 3.3.5 *Soit* E *un evn,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$
La suite (u_n) *est bornée pour la norme* $\|.\| \iff \exists M > 0$ *tq* $\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant M$
L'ensemble des suites bornées sur E *se note* $\ell^\infty(E)$ *(la norme est supposée donnée).*

Remarque 3.3.6 *Une suite n'est rien d'autre qu'une fonction définie sur* $\mathbb{N}$*. On retrouve ici la définition d'une fonction bornée donnée dans la définition 3.1.32*

Proposition 3.3.7 $\ell^\infty(E)$ *est un sev de* $E^{\mathbb{N}}$.
Pour $u \in \ell^\infty(E)$ *on note* $\|u\|_\infty = Sup\{\|u_n\| / n \in \mathbb{N}\}$*. Alors* $(\ell^\infty(E), \|.\|_\infty)$ *est un evn.*

Car ...

Exemple 3.3.8 *Plaçons nous dans* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$*. La suite matricielle* (A_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $A_n = \begin{pmatrix} \sin n & 1/n \\ (-1)^n & e^{-n} \end{pmatrix}$ *est une suite bornée.*

Théorème 3.3.9 *Soit* E *un evn et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}$$

Car ...

ATENTION La réciproque est fausse. Donner un contre-exemple

3.3.4 Opérations sur les suites convergentes

Théorème 3.3.10 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de l'evn* E*, et* $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$.

$$\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ converge vers } \ell \\ (v_n) \text{ converge vers } \ell' \end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha u_n + \beta v_n) \text{ converge vers } \alpha\ell + \beta\ell'$$

En d'autres termes, l'espace des suites convergentes est un sev de $\ell^\infty(E)$

Car ..

Théorème 3.3.11 ***"Produit" d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0***
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$$\left.\begin{array}{c} (u_n) \text{ bornée} \\ (\alpha_n) \text{ converge vers } 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha_n u_n) \text{converge vers } 0$$

$$\left.\begin{array}{c} (u_n) \text{ converge vers } 0 \\ (\alpha_n) \text{ bornée} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha_n u_n) \text{converge vers } 0$$

Dans ce théorème, il s'agit du produit au sens multiplication externe d'un ev : la suite (u_n) est une suite vectorielle alors que la suite (α_n) est une suite scalaire. La multiplication a bien un sens.
Démonstration ...

Théorème 3.3.12 *Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*

$$\left.\begin{array}{r}(u_n) \textit{ converge vers } \ell \in E \\ (\alpha_n) \textit{ converge vers } \alpha \in \mathbb{K}\end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha_n u_n) \textit{converge vers } \alpha\ell$$

Se démontre en écrivant $\|\alpha_n u_n - \alpha\ell\| = \|\alpha_n u_n - \alpha u_n + \alpha u_n - \alpha\ell\|$. Terminer la démonstration ....

Exercice 3.3.13 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée.*
Soit (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathcal{A}$. Démontrer :

$$\left.\begin{array}{r}(u_n) \textit{ converge vers } \ell \in \mathcal{A} \\ (v_n) \textit{ converge vers } \ell' \in \mathcal{A}\end{array}\right\} \Longrightarrow (u_n v_n) \textit{converge vers } \ell\ell'$$

Théorème 3.3.14 ***Effet d'une application lipschitzienne sur une suite convergente.*** *Soit E et F deux evn, $A \subset E$ et $f : A \to F$ application lipschitzienne, soit $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in A$.*

$$(u_n) \textit{ converge vers } \ell \Longrightarrow \textit{la suite } (f(u_n)) \textit{ converge vers } f(\ell)$$

Car ...

3.3.5 Suites d'un evn produit

Théorème 3.3.15 *Soit $(E_k, N_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une famille d'evn, et $E = E_1 \times ... \times E_p$ l'espace produit muni de la norme infinie rattachée aux normes N_k.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $u_n = (u_{1,n}..., u_{p,n})$ où pour tout k, $(u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} \in E_k^{\mathbb{N}}$.
Soit $\ell = (\ell_1, ..., \ell_p) \in E$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers ℓ pour $\|.\|_\infty$ $\iff$ $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $(u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k dans (E_k, N_k)

C'est dû à : $\forall k, \forall n,\ N_k(u_{k,n} - \ell_k) \leqslant \|u_n - \ell\|_\infty \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{p} N_j(u_{j,n} - \ell_j)$.
Faire la démonstration détaillée.

3.3.6 Normes différentes sur un même ev

ATTENTION Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. Soit N et N' deux normes sur E.

$$\begin{array}{rcl}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \text{ pour } N & \not\Rightarrow & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \text{ pour } N' \\ & \not\Rightarrow & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge pour } N'\end{array}$$

Et de même

$$\left.\begin{array}{r}(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \text{ pour } N \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell' \text{ pour } N'\end{array}\right\} \not\Longrightarrow \ell = \ell'$$

Exemple 3.3.16 *On reprend l'exemple 3.2.4*
Montrer que la suite (f_n) converge pour la norme $\|.\|_1$, mais diverge pour la norme $\|.\|_\infty$.

3.4 Valeurs d'adhérence d'une suite

3.4.1 Suites extraites, sous-suites

Définition 3.4.1 *On appelle extractrice, tout application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.*

Exemple 3.4.2 *Parmi ces fonctions, donner les extractrices.*

1. $\varphi : n \to 2n+1$
2. $\varphi : n \to n^2$
3. $\varphi : n \to n-1$
4. $f : n \to (n-3)^2$

Proposition 3.4.3 *φ extractrice $\Longrightarrow \forall n,\ \varphi(n) \geqslant n$*

Récurrence à rédiger.

Définition 3.4.4 ***Suites extraites***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$
Une suite extraite (on dit aussi sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une extractrice.

Remarque 3.4.5 *Remarquons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite d'elle même.*

Dans ce cas, l'extractrice est la fonction identité.

Théorème 3.4.6 *Soit (E, N) un evn et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \iff \text{ toute suite extraite de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell$$

Quel est le sens évident ?
Démonstration de l'autre sens :

Conséquence 3.4.7 *Si on trouve deux extractrices ϕ et ψ telles que la sous-suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ et telle que la sous-suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ' avec $\ell \neq \ell'$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Exemple 3.4.8 *Montrer que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos(\frac{\pi}{2}n)$ diverge.*

Théorème 3.4.9 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \iff \text{ les sous-suites } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers la même limite}$$

Là encore, quel est le sens déjà prouvé ?
Démonstration de l'autre sens :

3.4.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass (version 1)

Théorème 3.4.10 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E. On munit E de la norme infinie relative à la base $\mathcal{B}$.*
Pour cette norme, de toute suite bornée de E on peut extraire une sous-suite qui converge

En effet ....

3.4.3 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 3.4.11 *Soit $(E, \|.\|)$ un evn, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et $\ell \in E$*
ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ

Exemple 3.4.12 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{2n} = n \\ u_{2n+1} = 1 + \dfrac{1}{2n+1} \end{cases}$. Déterminer une valeur d'adhérence de cette suite.*

Exemple 3.4.13 *Un exemple très utile :*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$. 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence.

Proposition 3.4.14 *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a 1 et 1 seule valeur d'adhérence.*
Mais la réciproque est fausse : une suite ayant 1 et 1 seule valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente

Démonstration du théorème

Pour la réciproque, reprendre l'exemple 3.4.12, montrer alors que cette suite ne converge pas, et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Proposition 3.4.15 .
ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall\varepsilon > 0,\ \forall N > 0,\ \exists n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$

car ...
Le théorème de Bolzano Weierstrass (version 1) s'énonce donc aussi sous la forme :

Théorème 3.4.16 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E, E normé par la norme infinie relativement à $\mathcal{B}$.*
Toute suite bornée de E admet une valeur d'adhérence.

3.5 Normes équivalentes

Posons le problème : on a vu que dans un evn, la convergence d'une suite est liée à la norme. On voudrait trouver une CNS sur les normes en sorte que la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ pour la norme N_1 soit équivalente à la convergence de ces suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ pour la norme N_2
Tout part de ce qui suit :

Proposition 3.5.1 *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2.*
$\exists\beta > 0$ *tel que* $N_2 \leqslant \beta N_1 \iff$ *(Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 pour N_1 converge vers 0 pour N_2).*

En effet 1) Rédigez le sens direct
Démonstration par l'absurde de la réciproque

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 3.5.2 *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2.*

$$\begin{gathered}\text{On dira que } N_1 \text{ est équivalente à } N_2 \\ \Updownarrow \\ \exists\alpha > 0,\ \exists\beta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x) \\ \Updownarrow \\ \exists\alpha > 0,\ \exists\beta > 0 \text{ tel que } \alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1\end{gathered}$$

Proposition 3.5.3 *Sur l'ensemble des normes définies sur E, la relation "N_1 est équivalente à N_2" est une relation d'équivalence.*

Ce qui est heureux dans le choix du vocabulaire ...
En effet :

Exemple 3.5.4 *Dans $\mathbb{R}^p$, montrer que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.*

Donc, des normes équivalentes existent.

Exercice 3.5.5 *Montrer que dans $\mathbb{C}^p$, les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes*

Théorème 3.5.6 *qui fait tout l'intérêt de cette définition*
Soit E un espace vectoriel muni de deux normes N_1 et N_2 équivalentes.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée par* $N_1 \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée pour* N_2
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *pour* $N_1 \iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *pour* N_2
- $A \subset E$, A *bornée pour* $N_1 \iff A$ *bornée pour* N_2

Car ...

Exemple 3.5.7 *En reprenant l'exemple 3.2.4 justifier que sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes.*

Théorème 3.5.8 *Dans un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes*

En fait, on va montrer que si $\mathcal{B}$ est une base de E, toutes les normes sont équivalentes à la norme infinie relativement à la base $\mathcal{B}$, et donc par transitivité, elles sont toutes équivalentes
En effet ...

Ce théorème est fondamental car il signifie que **si on est dans un espace de dimension finie,**
la notion de partie bornée est indépendante de la norme

la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme. Et donc on peut choisir la norme avec laquelle on va travailler
Les valeurs d'adhérence d'une suite ne dépendent pas de la norme
Dans un espace de dimension finie, on peut dire "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge" sans avoir besoin de préciser la norme !
Conséquence :

Théorème 3.5.9 ***Bolzano-Weierstrass (version complète)***
Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée a une valeur d'adhérence

on ne précise plus la base, ni la norme.

Mais **dans un espace vectoriel de dimension infinie** on ne peut pas se dispenser de parler de la norme avec laquelle on travaille. Or des espaces de dimension infinie on en manipule beaucoup : par exemple l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$, ou $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ou ...

Théorème 3.5.10 ***Comment prouver que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes ?*** *Bien entendu l'espace vectoriel doit être de dimension infinie ...*

- *S'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ et $\lim \dfrac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} = +\infty$ alors N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes*
- *S'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ et $\lim \dfrac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} = 0$ alors N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes*

Car ...

Dans la pratique, il faudra essayer d'exhiber de telles suites ....