

Chapitre 4

Séries d'éléments d'un evn

4.1 Suites et séries

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel de dimension finie.

4.1.1 Définitions et généralités

Définition 4.1.1 — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. S_n est appelé $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série.

Etudier la série de terme général u_n c'est étudier la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour parler de la série de terme général u_n on note cette série $\sum u_n$.

- On dit que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E , et dans ce cas uniquement, la limite de cette suite est appelée somme de la série $\sum u_n$ et

se note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

- On dira que la série $\sum u_n$ diverge lorsqu'elle ne converge pas.
- On dira que deux séries sont de même nature si et seulement si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Proposition 4.1.2 Il y a bijection entre l'ensemble des suites de E et l'ensemble des séries définies sur E , c'est à dire qu'à toute suite de E on associe 1 et 1 seule série, et toute série de E est associée à 1 et 1 seule suite de E .

On vient de voir qu'à partir d'une suite de E on définit 1 et 1 seule série.

Pour la réciproque, il suffit de voir que pour $n \geq 1$, $S_n - S_{n-1} = u_n$ et $u_0 = S_0$, ce qui permet de retrouver la suite si on connaît la série, c'est à dire la suite des sommes partielles.

Proposition 4.1.3 Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature, et si elles

convergent alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$

car ...

Théorème 4.1.4 *La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$*

En effet : $\frac{1}{n} \geq \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n+1) - \ln(n)$. Alors, par télescopage, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$, et donc, $\lim S_n = +\infty$

Théorème 4.1.5 *Condition NÉCESSAIRE de convergence d'une série :*

$$\sum u_n \text{ converge} \implies \lim u_n = 0$$

Car Soit $S = \lim S_n = \sum_0^{+\infty} u_n$. Or pour $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ donc $\lim u_n = 0$.

Conséquence 4.1.6 *Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. On dit, dans ce cas qu'elle diverge grossièrement.*

Exemple 4.1.7 $\sum (-1)^n$ diverge **grossièrement**.

Remarque 4.1.8 *Le théorème est bien une condition nécessaire mais pas suffisante; comme contre exemple il suffit de considérer la série harmonique : si $u_n = \frac{1}{n}$, alors $\lim u_n = 0$ et pourtant $\sum u_n$ diverge.*

Définition 4.1.9 *Reste d'ordre n d'une série convergente*

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors vu 4.1.3, pour tout entier n fixé, $\sum_{k \geq n+1} u_k$ converge.

Cette somme est appelée Reste d'ordre n de la série $\sum u_k$, et se note souvent R_n i.e.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition 4.1.10 *Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $\lim R_n = 0$*

car ...

4.1.2 Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes

Théorème 4.1.11 *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

clair ...

Conséquence 4.1.12 Notons (ici) $S(E)$ l'ensemble des suites de E dont la série associée converge.

Alors $S(E)$ est un sev de $E^{\mathbb{N}}$ et l'application
$$\begin{cases} S(E) & \rightarrow E \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \rightarrow \sum_0^{+\infty} u_n \end{cases} \text{ est linéaire}$$

ATTENTION : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne sait rien de $\sum (u_n + v_n)$

Exercice 4.1.13 On suppose que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge. Que dire de $\sum (u_n + v_n)$?

Lorsque E est de dimension finie (ce qui est le cas dans ce chapitre) on sait que la convergence d'une suite peut se prouver en travaillant sur les coordonnées dans une base, ce qui se traduit ici par :

Théorème 4.1.14 $\dim E = p$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{i=1}^p u_{i,n} e_i$ avec $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors

$\sum u_n$ converge $\iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\sum_n u_{i,n}$ converge, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{i,n} \right) e_i$$

Conséquence 4.1.15 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \begin{cases} \sum Re(u_n) \text{ converge} \\ \sum Im(u_n) \text{ converge} \end{cases} \iff \sum \overline{u_n} \text{ converge}$$

4.1.3 Série géométrique dans $\mathbb{C}$

Théorème 4.1.16 Soit $a \in \mathbb{C}$.

La série $\sum_n a^n$ converge dans $\mathbb{C} \iff |a| < 1$, et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

car ...

4.1.4 Série télescopique associée à une suite

Définition-propriété 4.1.17 Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

On appelle série télescopique associée à cette suite, la série de terme général $u_n = v_n - v_{n-1}$ définie pour $n \geq 1$.

Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature, et

si elles convergent, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0$

clair, mais important.

4.2 Séries de nombres réels positifs

4.2.1 Théorème fondamental

Théorème 4.2.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels **positifs**. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles est majorée, i.e.

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M$$

En effet, la suite (S_n) est croissante et donc ...

Remarque 4.2.2 Sous les mêmes hypothèses, $\sum u_n$ diverge $\iff \lim_n S_n = +\infty$

Attention, cette remarque n'a de sens que pour les suites à termes positifs. Par exemple, la série $\sum (-1)^n$ diverge, mais pour autant la suite ne tend pas vers $+\infty$.

4.2.2 Comparaison des séries à termes réels positifs

: majoration, domination, équivalence.

Théorème 4.2.3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes réels **positifs** telles que $\forall n, u_n \leq v_n$. Alors

- $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge
- $\sum u_n$ diverge $\implies \sum v_n$ diverge.

clair en travaillant sur les sommes partielles

Exemple 4.2.4 On sait que pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. En utilisant le théorème 4.1.4 que peut-on conclure ?

Théorème 4.2.5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes réels **positifs** telles que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$. Alors

- $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge
- $\sum u_n$ diverge $\implies \sum v_n$ diverge.

Se déduit du théorème précédent et de la définition de $u_n = \mathcal{O}(v_n)$

Théorème 4.2.6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels positifs, et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

car ...

Exemple 4.2.7 1. Montrer que $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Conclure sur la nature de la série

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

2. Nature de la série $\sum (\sqrt{n^4 + 1} - n^2)$

3. Nature de la série $\sum n^{-\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})}$

4.2.3 Comparaison avec une série géométrique

Théorème 4.2.8 Comparaison logarithmique.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes réels strictement positifs telles que $\forall n, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Alors $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge.

Car, montrer que $\forall n, u_n = u_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}$ et en déduire que $u_n \leq \frac{u_0}{v_0} v_n$, puis conclure ...

Théorème 4.2.9 Si $\forall n, u_n > 0$ et si $\exists a > 0, b > 0$ tels que $\forall n, a \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq b$ alors :

- $b < 1 \implies \sum u_n$ converge
- $a \geq 1 \implies \sum u_n$ diverge.

Travailler avec $v_n = b^n$ et $w_n = a^n$

Théorème 4.2.10 Règle de D'Alembert

Si $\forall n, u_n > 0$ et si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors

- $\ell < 1 \implies \sum u_n$ converge
- $\ell > 1 \implies \sum u_n$ diverge
- Dans le cas où $\ell = 1$, le théorème ne permet pas de conclure

car ...

Remarque 4.2.11 Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$ alors $\sum u_n$ diverge

car alors la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang, et donc ne converge pas vers 0, ce qui prouve que la série diverge grossièrement.

Exemple 4.2.12 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$

Exemple 4.2.13 Discuter selon la valeur du réel $x > 0$ la nature de la série $\sum n^2 x^n$

Théorème 4.2.14 — Si $\exists q \in]0, 1[$ tel que $\lim_n q^n u_n = \ell > 0$ alors $\sum u_n$ diverge
— Si $\exists q > 1$ tel que $\lim_n q^n u_n = \ell \geq 0$ alors $\sum u_n$ converge

Car (raisonner sur des équivalents).

4.2.4 Comparaison à une intégrale impropre

4.2.4.1 Fonctions positives intégrales sur $\mathbb{R}_+$

Définition 4.2.15 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et **positive**.

On dira que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $F : x \rightarrow \int_0^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt$ se note $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ ou $\int_0^{+\infty} f$.

Plus généralement, pour a réel et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et **positive**.

On dira que f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $F : x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Exemple 4.2.16 Parmi les fonctions suivantes dire lesquelles sont intégrables sur l'intervalle donné

1. $f : x \rightarrow x^2$ sur $[0, +\infty[$; $g : x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$
2. $f : x \rightarrow x^{-\alpha}$ sur $[1, +\infty[$ (discuter selon α)
3. $f : x \rightarrow e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$

Remarque 4.2.17 On reviendra plus à fond sur la notion de fonction intégrable sur un intervalle, il s'agit ici d'une première approche utile pour l'étude des séries à termes positifs.

Proposition 4.2.18 $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et **positive**.

f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt = +\infty$

car

4.2.4.2 Comparaison série-intégrale

Théorème 4.2.19 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, **positive et décroissante**. On note $u_n = f(n)$. Alors

1. f est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \iff \sum f(n)$ converge $\iff \sum u_n$ converge
2. $\int_0^{n+1} f(t)dt \leq S_n \leq f(0) + \int_0^n f(t)dt$
3. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$
4. La série $\sum \left(\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n) \right)$ converge

car ...

Remarque 4.2.20 Ce qui importe dans l'item 1 de ce théorème c'est la convergence de $x \rightarrow \int_a^x f(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$. Donc, il n'est pas nécessaire que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}_+$: la continuité sur $[a, +\infty[$ est suffisante. Dans ce cas, il faut adapter la démonstration de l'item 2 du théorème pour obtenir une double inégalité du même type.

4.2.4.3 Séries de Riemann

Définition 4.2.21 On appelle série de Riemann toute série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ avec α réel fixé (ne dépend pas de n)

Théorème 4.2.22 La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$

En effet ...

Exemple 4.2.23 On retrouve ainsi les résultats vus dans l'exemple 4.2.7 et dans le théorème 4.1.4 (série harmonique)

Exemple 4.2.24 Etudier la nature des séries suivantes : $\sum u_n$ où

1. $u_n = \sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha}$ (discuter selon α) ;
2. $u_n = |\cos(1/n) - \exp(-1/n)|$
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

4.2.5 Comparaison à une série de Riemann

Théorème 4.2.25 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.

- si $\exists \alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ est bornée, alors $\sum u_n$ converge
- si $\exists \alpha \leq 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_n$ a une limite non nulle (éventuellement infinie), alors $\sum u_n$ diverge

car ...

Si $\exists \alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ converge, alors cette suite est bornée et donc la théorème est applicable d'où la propriété :

Proposition 4.2.26 Si $\exists \alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

Exemple 4.2.27 — Étude de la convergence de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{n^n}{2^{n^2}}$
 — Étude de la convergence de $\sum u_n$ où $u_n = \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$

Exercice 4.2.28 Les séries de Bertrand sont les séries $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ pour $n \geq 2$. Discuter selon les valeurs de α et de β la nature des séries de Bertrand

4.2.6 Étude des restes d'ordre n des séries positives convergentes

Théorème 4.2.29 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites positives, avec $u_n \sim v_n$

On suppose que $\sum v_n$ converge (et donc $\sum u_n$ converge aussi).

Alors $R_n \sim R'_n$ où $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$, c'est à dire les restes d'ordre n sont équivalents.

car ...

Remarque 4.2.30 Si $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $R_n = o(R'_n)$.

$u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $R_n = \mathcal{O}(R'_n)$.

Exemple 4.2.31 Donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ (on pourra utiliser l'exemple 4.2.7)

4.2.7 Étude des sommes partielles des séries positives divergentes

Théorème 4.2.32 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites positives, avec $u_n \sim v_n$

On suppose que $\sum v_n$ diverge (et donc $\sum u_n$ diverge aussi).

Alors $S_n \sim S'_n$ où $S_n = \sum_0^n u_k$ et $S'_n = \sum_0^n v_k$, c'est à dire les sommes partielles de même rang sont équivalentes

car ...

Exemple 4.2.33 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ayant une limite : $\lim_n u_n = \ell \in \mathbb{R}$

Montrons qu'alors $\lim_n \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} = \ell$

Cet exemple est connu sous le nom de théorème de Césaro (hors programme)

4.2.8 Formule de Stirling

Théorème 4.2.34

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Démonstration hors programme

4.3 Séries réelles alternées

4.3.1 Définition

Définition 4.3.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels.

On dira que la suite est alternée si et seulement si

$(\forall n, u_n = (-1)^n |u_n|)$ ou $(\forall n, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|)$.

Exemple 4.3.2

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad , \quad v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \quad , \quad w_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$$

Ces suites sont-elles alternées ?

Définition 4.3.3 On dira que la série $\sum u_n$ est une série alternée si et seulement si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alternée.

4.3.2 Théorème des séries alternées (TSA)

Théorème 4.3.4 Toute série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0 est une série convergente, i.e.

$$\left. \begin{array}{l} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ suite alternée} \\ (|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} \text{ suite décroissante} \\ \lim_n u_n = 0 \end{array} \right\} \implies \sum u_n \text{ converge}$$

et

- $\forall n, S_n$ et S_{n+1} encadrent $S = \sum_0^\infty u_k$
- $\forall n, |R_n| = |S - S_n| \leq |u_{n+1}|$
- $\forall n, R_n$ a le même signe que u_{n+1} (premier terme négligé lorsqu'on approche S par S_n)

car ...

Exemple 4.3.5 *Séries de Riemann alternées : ce sont les séries $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que ces séries convergent si et seulement si $\alpha > 0$.*

Ces séries, pour $0 < \alpha \leq 1$ constituent d'excellents exemples de suites dont la série converge, mais dont la série des valeurs absolues diverge

Remarque 4.3.6 *Ici les séries sont à termes réels. Les théorèmes de comparaison, par exemple sur les équivalents sont faux sur les séries à termes à signes non constants. Par exemple :*

Exemple 4.3.7 Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et soit $v_n = u_n + \frac{1}{n \ln n}$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge (cette série est appelée série harmonique alternée)
2. Montrer que $u_n \sim v_n$
3. Montrer que $\sum (v_n - u_n)$ diverge et en déduire la nature de $\sum v_n$.

Exercice 4.3.8 1. Nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

2. Discuter selon la valeur de α la nature des séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$

3. nature de la série $\sum \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$

4.4 Séries d'éléments d'un evn de dimension finie

E un evn de dimension finie. Toutes les normes étant équivalentes, on ne précise pas la norme utilisée.

4.4.1 Convergence absolue

Définition 4.4.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

On dira que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série positive $\sum \|u_n\|$ converge

On s'est ainsi ramené aux séries à termes dans $\mathbb{R}_+$.

Cas particulier 4.4.2 Dans le cas où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,
 $\sum u_n$ converge absolument $\iff \sum |u_n|$ converge.

Exemple 4.4.3 1. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument

2. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas absolument

4.4.2 Convergence absolue $\implies$ convergence

Théorème 4.4.4 *Cas des séries numériques : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

$\sum u_n$ converge absolument $\implies \sum u_n$ converge et dans ce cas,

$$\left| \sum_0^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_0^{+\infty} |u_n|$$

car ...

ATTENTION : la réciproque est fausse comme le montre la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Théorème 4.4.5 *Cas général d'un evn de dimension finie : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.*

$\sum u_n$ converge absolument $\implies \sum u_n$ converge et dans ce cas,

$$\left\| \sum_0^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_0^{+\infty} \|u_n\|$$

car ...

4.4.3 Séries géométriques

Théorème 4.4.6 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie, ayant pour unité e .*

Soit $u \in \mathcal{A}$ tel que $\|u\| < 1$.

Alors $\sum u^n$ converge absolument (donc converge) et

$e - u$ est inversible dans $\mathcal{A}$, avec $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$

Rappeler la définition d'une algèbre normée ...

Comparer alors $\|u^n\|$ avec $\|u\|^n$. Conclure sur la convergence absolue de $\sum u^n$.

Montrons alors que $e - u$ inversible et ...

Cas particulier 4.4.7 *Dans le cas où $E = \mathbb{C}$ algèbre normée, on retrouve le fait que $|z| < 1 \implies$*

$$\sum_0^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Remarque 4.4.8 *Si N est une norme d'espace vectoriel sur $\mathcal{A}$, et $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre, on peut avoir $N(a) > 1$ avec pourtant $\sum a^n$ converge.*

Par exemple : prenons $N = 3 \|\cdot\|$. N est clairement une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}$. Soit alors $a \in \mathcal{A}$ tel que $N(a) = 2$, alors $\|a\| = 2/3 < 1$, donc $\sum \|a\|^n$ converge, vu le théorème, et donc $\sum a^n$ converge pour $\|\cdot\|$ (CVA $\implies$ CV) et donc, les normes étant équivalentes, $\sum a^n$ converge pour N .

4.4.4 Série exponentielle

Théorème 4.4.9 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée de dimension finie, ayant pour unité e et soit $u \in \mathcal{A}$.

La série $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente, et sa somme est notée $\exp(u)$.

$$\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$$

Car, par application de D'Alembert, $\sum \frac{\|u\|^n}{n!}$ converge.

Remarque 4.4.10 — Si $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, on obtient pour x réel, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. On admettra pour l'instant qu'il s'agit bien de l'exponentielle rencontrée en terminale et en Mpsi.

— Si $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, on obtient pour z complexe, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. On admettra pour l'instant qu'il s'agit bien de l'exponentielle complexe rencontrée en Mpsi :
 $\exp(z) = e^{\operatorname{Re}(z)}(\cos(\operatorname{Im}z) + i \sin(\operatorname{Im}z))$.

— Si $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on obtient pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ qui nécessite de connaître les puissances successives de A . On peut se ramener utilement au chapitre sur la réduction des matrices ...

Exemple 4.4.11 Pour $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer $\exp(A)$

4.4.5 Espace vectoriel des séries absolument convergentes

Définition 4.4.12 On note $\ell^1(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum |u_n|$ converge (i.e. la série $\sum u_n$ converge absolument dans $\mathbb{K}$).

Théorème 4.4.13 $\ell^1(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé par la norme N_1 définie par

$$N_1 : \begin{cases} \ell^1(\mathbb{K}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \end{cases}$$

En effet ...

Définition 4.4.14 Généralisation

Soit E un evn de dimension finie. On note $\ell^1(E)$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum \|u_n\|$ converge (i.e. la série $\sum u_n$ converge absolument dans E).

Théorème 4.4.15 $\ell^1(E)$ est un espace vectoriel normé par la norme N_1 définie par

$$N_1 : \begin{cases} \ell^1(E) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| \end{cases}$$

Démonstration très voisine de celle du théorème précédent. À faire.