

FORMULE DE STIRLING

DEVELOPPEMENT DE $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Rappeler un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$, et l'on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2, u_n = b_n - b_{n-1}$.
 Prouver que la série de terme général u_n converge.
 Qu'en déduit-on pour la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
 On note $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ (γ est bien entendu la constante d'Euler).
3. Quel est le développement asymptotique de b_n à l'ordre 1 dans l'échelle des $(\frac{1}{n^k})_{k \in \mathbb{N}}$?
4. Réappliquer le même schéma à la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = b_n - \gamma - \frac{1}{2n}$ et donner le développement asymptotique de b_n à l'ordre 2.

FORMULE DE STIRLING

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = (n + \frac{1}{2}) \ln n - n - \ln n!$.

1. Donner le terme général v_k d'une série dont S_n représente la somme partielle d'ordre n .
2. Donner le développement asymptotique de v_k à l'ordre 2.
 Qu'en conclut-on ? On note $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
3. Prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!} = e^L$.
 En déduire la formule suivante $n! \sim e^{-L} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

ET WALLIS POUR CONCLURE

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$.

1. Pour $n \geq 2$, exprimer I_n en fonction de I_{n-2} .
 En déduire une expression de I_n en fonction de n .
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 Prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.
3. Prouver que $\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{2p} \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.
 En déduire que $e^{-L} = \sqrt{2\pi}$ (où L est le nombre défini dans le paragraphe précédent).
4. Quel est le développement asymptotique de $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n}$ à l'ordre 1?