Endomorphismes orthogonaux

1. (78) Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
   On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

   (a) Soit u un endomorphisme de E, tel que: $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
      i. Démontrer que: $\forall (x, y) \in E^2 \ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
      ii. Démontrer que u est bijectif.

   (b) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi $\circ$, est un groupe.

   (c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
      Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

2. (92) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
   On pose $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A , B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

   (a) Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

   (b) On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble matrices symétriques de E et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
      i. Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
      ii. Prouver que $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^\perp$.

   (c) Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
      Déterminer $F^\perp$.

3. Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

4. Trouver les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

5. Soient E un espace euclidien et f une application de E vers E vérifiant

$$f(0) = 0 \text{ et } \forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

   (a) Montrer que $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$

   (b) Établir que $\forall x, y \in E, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$

   (c) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Justifier que $\forall x \in E, f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (e_k \mid x)\, f(e_k)$

   (d) En déduire que f est un automorphisme orthogonal de E.

6. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $< P, Q >= \int_{-1}^{1} PQ$. Soit $\varphi \in L(E)$ défini par $\varphi(P)(X) = P(-X)$. Montrer que φ est une symétrie orthogonale.

7. Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \perp G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$.

8. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $u \in E$ non nul.
   On considère l'application $f : x \mapsto u \wedge x$.

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E. En déterminer image et noyau.

   (b) Montrer que f^2 est diagonalisable dans une base orthonormée.

9. Soit $f \in L(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \|f(\vec{x})\| = \lambda \|\vec{x}\,\|$.

   (a) Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (f(\vec{x}) \mid f(\vec{y})) = \lambda^2 (\vec{x} \mid \vec{y})$.

   (b) Caractériser les similitudes par leurs matrices dans une base orthonormée.

   (c) Montrer que f est une similitude si et seulement si f est non nulle et conserve l'orthogonalité, c'est à dire : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ \vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \perp f(\vec{y})$.

10. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sev stable par u. Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par u.

11. On considère l'équation $M\,{}^tMM = I_n$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si M est solution, alors M symétrique.
Résoudre alors l'équation.

12. Justifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et trouver P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $rg(A) = rg({}^tA.A)$.
En déduire que le rang de A est égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leur ordre de multiplicité) de ${}^tAA$.

14. E eve de dimension 3, muni d'une base orthonormé $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f \in L(E)$ de matrice dans la abse $\mathcal{B}$:
$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$ avec $a,\ b,\ c$ réels.

    (a) Déterminer a, b, c en sorte que $f \in O(E)$.

    (b) Caractériser alors f.

15. Soit $f \in O(E)$ avec E eve.

    (a) On suppose que $f \in O^-(E)$. Montrer que -1 est valeur propre de f.

    (b) On suppose que $f \in O^+(E)$. montrer que si n est impair, alors 1 est valeur propre de f.
    Que peut-on dire si n est pair ?

16. Soit $A = (a_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\left| \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \leqslant n^{3/2}$.

17. On note $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi / a, b, \in \mathbb{Q}\}$ oùi vérifie $i^2 = -1$.

    (a) En considérant $z_p = \dfrac{(p+i)^2}{|p+i|^2}$ où $p \in \mathbb{Z}$, montrer que $U \cap \mathbb{Q}[i]$ est dense dans U

    (b) Montrer que $O_2(\mathbb{Q})$ est dense dans $O_2(\mathbb{R})$

18. On note S_n^+ l'ensemble des matrices réelles symétriques, dont toutes les valeurs propres sont positives.
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$

    (a) Montrer que $S \in S_n^+$ si et seulement si, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0$.

    (b) Soit $S \in S_n^+$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S =^t AA$.

19. Que peut-on dire des valeurs propres complexes d'une matrice symétrique réelle ?
Même question dans le cas des matrices antisymétriques réelles.

20. Soit E un eve et $u \in L(E)$.

    (a) Monter qu'il existe 1 et 1 seul endomorphisme de E, noté u^* tel que $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y >=< x, u^*(y) >$ (on pourra considérer les marices des endomorphismes dans une base orthonormée). Exprimer dans une BON $\mathcal{B}$ la matrice de u^* en fonction de celle de u

    (b) Que dire de u^* dans le cas où $u \in S(E)$?

    (c) Montrer que u et u^* ont mêmes valeurs propres.

21. Soit E un eve et $u \in L(E)$.
On suppose ici que u possède deux valeurs propres réelles de signes contraires.
Montrer $\exists z \neq 0$ tel que $< u(z), z >= 0$