Convexité

1. Soit E un evn. Montrer que toute boule ouverte est convexe. Idem pour les boules fermées.

2. (45) **Les questions 1. et 2. sont indépendantes**.
   (a) Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
   On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.
      i. Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
      ii. Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
   (b) Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. On pose $\forall x \in E$, $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.
      i. Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A}$.
      ii. On suppose que A est fermée et que, $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $d_A(tx + (1-t)y) \leqslant td_A(x) + (1-t)d_A(y)$.
      Prouver que A est convexe.

3. (34) Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.
   (a) Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
   (b) Démontrer que: $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$.
   (c) Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (d) Démontrer que, si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

4. Montrer que $\forall x > -1,\ \ln(1 + x) \leqslant x$.
   Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant e^x$.

5. Soit f concave de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout couple (x, y) de réels positifs, $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ (on pourra utiliser la décroissance des pentes entre 0, x et $x + y$, et faire de même entre 0, y et $x + y$)

6. Montrer que $\forall (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n,\ \sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$.
   Montrer que pour tout a, b, c réels positifs, $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$
   Montrer que pour tout a, b, c réels positifs, $(a + b + c)^3 \geqslant 27abc$

7. Soit f une application convexe sur $\mathbb{R}$ et majorée. Montrer que f est constante (on pourra montrer que f est à la fois croissante et décroissante)
   Donner un exemple de fonction convexe majorée sur $]0, +\infty[$ et qui n'est pas constante

8. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et g une fonction convexe et croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'alors $g \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   Donner un exemple de deux fonctions f et g convexes sur $\mathbb{R}$ telles que $g \circ f$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

9. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$
   (a) Montrer que $\forall x > 0$ avec $x \neq 1$, $\forall t \in [1, x^2]$, $\dfrac{2 \ln x}{x^2 - 1}(t - 1) \leqslant \ln t \leqslant t - 1$
   (b) En déduire que la fonction f admet une limite au point 1.

10. (a) Soit $p > 0$, $q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que pour tous nombres réels $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$ on a :
   $$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}$$
   (b) Dans le cas où $p = q = 2$ quelle inégalité bien connue retrouve-t-on ?
   (c) (*)Soit $p \geqslant 1$ et $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ des réels positifs. Montrer que
   $$\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{1/p}$$
   (d) Soit $p \geqslant 1$. On considère la fonction :N_p de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $N_p(x_1, ..., x_n) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$.
   Montrer que N_p est une norme.
   Quelle est cette norme dans le cas $p = 1$? et dans le cas $p = 2$? Que devient $N_p(x_1, ..., x_n)$ quand p tend vers $+\infty$?