Déterminants, trace, rang

1. (63) Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :
$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.
(a) Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
(b) Déterminer D_n en fonction de n.

2. Calculer les déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & & ... & n \\ 2 & 3 & ... & n & 1 \\ 3 & ... & n & 1 & 2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & 1 & 2 & ... & n-1 \end{vmatrix}$

3. Soit $(E_{i,j})_{i,j \in [[1,n]]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$ ($E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en ligne i colonne j qui vaut un 1)
(a) Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$.
(b) Soit $f \in \mathcal{M}_n(K)^*$ telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K),\ f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace.
(c) Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $g(AB) = g(BA)$ pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g conserve la trace.

4. Pour $a \in \mathbb{K}^\star$, calculer $D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & 2a \end{vmatrix}$

5. Montrer que s'il existe deux matrices $A \neq 0$ et $B \neq 0$ de $\mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB + BA = 0$ alors n est pair.

6. Soit $f : \mathcal{M}_n(R) \to \mathcal{M}_n(R)$ définie par $X \to^t X$. Donner le déterminant de f

7. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$.
Donner un exemple de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det(A^2 + B^2) < 0$

8. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $AC = CA$. Le but de l'exercice est de montrer que
$\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$
(a) Traiter le cas où A est inversible.
(b) (*) Dans le cas où A n'est pas inversible, répondre à la question en introduisant les matrices $A_p = A + \dfrac{1}{p}I$

9. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = MA$. Exprimer la trace de φ en fonction de celle de A.

10. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\mathrm{rg}(M^n) = \mathrm{rg}(M^{n+1})$.

11. Soit $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $C_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & . & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & . & a_{n-3} \\ . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & . & a_0 \end{pmatrix}$ et $D_n =\det C_n$. D_n est appelé un *déterminant circulant*. On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $X_k = \displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} a_r \omega_k^r$. Soit enfin $M = ((\omega_k^j))_{1 \leq k,j \leq n}$.
Evaluer le produit matriciel $C_n.M$ et en déduire une expression de D_n.