# Equations différentielles linéaires

1. (31) (a) Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4 x$.
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle: $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

2. (32) Soit l'équation différentielle: $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.
   (a) Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière à l'origine.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
   (b) Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0;1[$ sont développables en série entière à l'origine?

3. (42) On considère les deux équations suivantes: $2xy' - 3y = 0 \quad (H)$ et $2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$
   (a) Résoudre l'équation $(H)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   (b) Résoudre l'équation $(E)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

4. (30) (a)Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
   (b) Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) i. Trouver une équation différentielle linéaire $(E)$ d'ordre 1 dont $f$ est solution.
   ii. Résoudre $(E)$ .

5. Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' & = y + e^{-t} \\ y' & = -x + e^{-t} \end{cases}$

6. Résoudre l'équation différentielle : $x'' + x = \tan^2 t$

7. Résoudre les systèmes différentiels

   (a) $\begin{cases} x' - y = \cos t \\ y' + x = 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x' = x + 3y + \cos t \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x' = 5x + y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x' = 3x + y + 3t \\ y' = -4x - y + 6t - 3 \\ z' = 4x - 8y + 2z \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases}$

8. Résoudre le système différentiel suivant, selon les valeurs du paramètre réel $a$
   $\begin{cases} x' = ax + y + z \\ y' = x + ay + z \\ z' = x + y + az \end{cases}$
   On pourra soit exploiter la procédure générale, soit (plutôt) introduire une quatrième application, fonction de $x$, $y$ et $z$.

9. Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :

   (a) $y' - (x+1)(y+1) = 0$ et $y(0) = 1$
   (b) $(1+x^2)y' - (x+1)y = 2$ et $y(0) = -1$.

10. Résoudre les équations différentielles suivantes :

    (a) $y' - y = \sin(2x)\mathrm{e}^x$
    (b) $y' + 2xy = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$
    (c) $y' + y \tan x = \sin 2x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$

11. On considère l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$, avec $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que les tangentes au point d'abscisse $x_0$ aux courbes intégrales sont ou bien parallèles ou bien concourantes.

12. Prouver que toute solution de l'équation différentielle $y' + e^{x^2} y = 0$ admet une limite nulle en $+\infty$

13. Soit $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable.
Établir que les solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

14. Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x_1' = (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -4x_1 + (t-3)x_2 \end{cases}$

15. Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec $a$ impaire et $b$ paire. Montrer que l'équation différentielle : $(E) \qquad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ admet une unique solution impaire.

16. Soit $q$ une fonction continue, intégrable sur $[0, +\infty[$. Soit $E$ l'équation différentielle $y'' + qy = 0$.
    (a) Si $f$ est une solution bornée de $E$ sur $[0, +\infty[$, montrer que sa dérivée $f'$ converge en $+\infty$.
    Quelle est la valeur de cette limite ?
    (b) Soient $f$ et $g$ deux solutions bornées. Étudier le wronskien de $f$ et de $g$ : $w = f'g - fg'$.
    En déduire que $f$ et $g$ sont liées. Que peut-on en conclure ?

17. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$.

18. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation $t^3 y'' + ty' - y = 0$.

19. Résoudre sur $]0, 1[$ l'équation $x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0$ en commençant par rechercher une solution développable en série entière.

20. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1+t^2)^2 y''(t) - 2t(1+t^2)y'(t) + 2(t^2-1)y(t) = (1+t^2)$, On pourra commencer par rechercher une solution polynomiale de l'équation homogène.

21. Résoudre l'équation différentielle : $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$ après avoir vérifié qu'une fonction $t \to e^{at}$ est solution pour un certain $a$.

22. On cherche à déterminer les fonctions $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x > 0, \ f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
    (a) Montrer que si une telle fonction $f$ existe, elle est de classe $\mathcal{C}^2$.
    (b) Déterminer une équation différentielle linéaire de la variabel $x$ dont $f$ serait alors solution.
    (c) En faisant le changement de variable $t = \ln(x)$, résoudre cette dernière équation.
    (d) Déterminer alors les fonctions solutions du problème initial.

23. Résoudre de deux manières différentes le système différentiel : $\dfrac{dX}{dt} = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

24. Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} x' &= -x - 2y - 2z \\ y' &= -3x - 5y - 5z \\ z' &= 4x + 6y + 6z \end{cases}$ et $x(0) = 1, \ y(0) = 1, \ z(0) = 1$

25. Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = f$ admet au plus 1 solution périodique

26. Résoudre le système $\begin{cases} x' &= -3x + 2y \\ y' &= -7x + 4y - z \\ z' &= 3x - y + 2z \end{cases}$

27. On considère l'équation différentielle $xy' - 2|y| = x$. (On remarquera que ce n'est pas une équation linéaire). Le but de l'exerce est de montrer que cette équation n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.
On Suppose que cette équation a une solution $f$ sur $\mathbb{R}$.
(a) Déterminer $f(0)$ et montrer que $f$ est monotone sur $[0, +\infty[$.
(b) Déterminer alors la fonction $f$.
(c) Faire surgir une contradiction