# Espaces préhilbertiens réels

1. (76) Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
   On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
   (a) i. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
       ii. Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.
   (b) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
       Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure $m$ et déterminer la valeur de $m$.

2. (77) Soit $E$ un espace euclidien.
   (a) Soit $A$ un sous-espace vectoriel de $E$.
       Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
   (b) Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
       i. Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
       ii. Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

3. (79) Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a<b$.
   (a) Soit $h$ une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
       Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$ .
   (b) Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
       On pose, $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
       Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $E$.
   (c) Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4. (80) Soit $E$ l'espace vectoriel des applications continues et $2\pi$-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $E$.
   (b) Soit $F$ le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.
       Déterminer le projeté orthogonal sur $F$ de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

5. (81) On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\,({}^tAA')$, où $\mathrm{tr}\,({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice $A'$.
   On note $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   On admet que $\varphi$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
   (a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
   (c) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$ .
   (d) Calculer la distance de $J$ à $\mathcal{F}$.

6. (82) Soit $E$ un espace préhilbertien et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie $n > 0$.

   On admet que pour tout $x \in E$, il existe un élément unique $y_0$ de $F$ tel que $x - y_0$ soit orthogonal à $F$ et que la distance de $x$ à $F$ soit égale à $\|x - y_0\|$.

   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

   (a) Démontrer que $( . | . )$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel $F$ des matrices triangulaires supérieures.

7. Soient $x, y$ deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien. Établir : $\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}$.

8. Soient $E$ un espace préhilbertien réel et $f, g : E \to E$ telles que $\forall x, y \in E, (f(x) \mid y) = (x \mid g(y))$. Montrer que $f$ et $g$ sont linéaires.

9. Soient $E$ un espace préhilbertien réel, $F$ un sev de $E$, et $x$ un vecteur de $E$.
   Montrer : $x \in F^{\perp} \iff (\forall y \in F,\ (x \mid y) \leqslant \|y\|^2$

10. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A \mid B) = tr({}^tA.B)$.

    (a) Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$

    (b) Montrer que l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

11. (a) Montrer l'existence et l'unicité de $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t$.
    Montrer que $A$ est de degré $n$.

    (b) Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t$ ?

12. Soit $E = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
    On pose $F = \{f \in E / \forall t \in [-1,0], f(t) = 0\}$ et $G = \{g \in E / \forall t \in [0,1], g(t) = 0\}$.

    (a) Montrer que $F^{\perp} = G$.

    (b) Les sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ sont-ils supplémentaires ?

13. On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
    Pour $f \in E$, on note $F$ la primitive de $f$ qui s'annule en $0$ : $\forall x \in [0,1], F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et on considère l'endomorphisme $v$ de $E$ déterminé par $v(f) = F$.

    (a) Déterminer un endomorphisme $v^\star$ vérifiant $\forall f, g \in E, \langle v(f), g \rangle = \langle f, v^\star(g) \rangle$

    (b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v^\star \circ v$.

14. Soient $a, b$ deux vecteurs unitaires d'un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n$, et $f : x \to x - (a \mid x)b$.

    (a) A quelle condition la fonction $f$ est-elle bijective ?

    (b) Exprimer $f^{-1}(x)$ lorsque c'est le cas.

    (c) A quelle condition l'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

15. Soit $F$ un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel $E$. Établir $F^{\perp} = \overline{F}^{\perp}$ où $\overline{F}$ désigne l'adhérence de $F$.

16. Soit $E$ un espace vectoriel hermitien, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormée de $E$. On note $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Que dire de $\det(P)$ ?

17. Soit $E$ eve, et $p \in L(E)$ une projection. Montrer :
    $p$ projection orthogonale $\iff \forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$

18. Soit $E$ un eve, et $p$ et $q$ deux projecteurs orthogonaux. Montrer que :
    $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q) \iff \forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|q(x)\|$

19. Soient $F, G$ deux sous-espaces de $E$ tels que $F \perp G$. On note $s_F$ et $s_G$ les symétries orthogonales de bases $F$ et $G$. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^{\perp}}$.