# TD : La fonction *Gamma*

On appelle **fonction Gamma** la fonction notée $\Gamma$ définie par $\Gamma : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$

Nous allons étudier plusieurs propriétés de cette fonction $\Gamma$

1. Montrer que $\Gamma$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$
2. Montrer que $\Gamma$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression de sa dérivée
   Montrer de même que $\Gamma$ est $C^\infty$ sur $]0,+\infty[$
   Montrer que $\Gamma$ est convexe.
3. Relation fonctionnelle.
   Montrer que $\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   En déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$ une expression simple de $\Gamma(n)$
4. Des limites
   (a) Déterminer la limite en 0 de $\Gamma$
   (b) Donner un équivalent simple de $\Gamma(x)$ en 0.
   (c) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\Gamma$.
5. Donner l'allure de la courbe $\Gamma$
6. Calcul de $\Gamma(1/2)$
   (a) Exprimer $\Gamma(1/2)$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$
   (b) Soit $H : x \to \displaystyle\int_0^{x} e^{-u^2}du$ et $F : x \to \displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.
   Montrer que $F$ et $H$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que $F$ et $H$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que la fonction $F + H^2$ est constante sur $\mathbb{R}$
   (c) En déduire la limite en $+\infty$ de $H$.
   (d) Conclure sur $\Gamma(1/2)$.
7. Montrer que $\forall x \in ]0,2[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{n!} e^{-t}\,dt\right)(x-1)^n$.
8. L'objectif de cette question est de calculer $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, $0 \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \leqslant \mathrm{e}.\mathrm{e}^{-t}$
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
   (c) Montrer : $\displaystyle\int_0^{n} \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \ln n + \int_0^{1} \frac{(1-u)^n - 1}{u}\,\mathrm{d}u$
   (d) En déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$ où $\gamma$ désigne la constante d'Euler.
   (e) Calculer $\Gamma'(2)$.