NOTIONS SUR LA FONCTION DZETA DE RIEMANN

Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1. Quel est l'ensemble de définition (noté D) de ζ ?
2. Montrer que ζ est continue sur D.
3. Montrer que ζ est de classe C^1 sur D, et pour $s \in D$, donner une expression de $\zeta'(s)$ en fonction de s.
4. Montrer que $\lim_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1$.
5. Pour $s \in D$ et $n \geq 2$, encadrer $\frac{1}{n^s}$ par des expressions intégrales.
   En déduire un encadrement de $\zeta(s)$, et déterminer un équivalent simple de $\zeta(s)$ lorsque s tend vers 1 par valeurs strictement supérieures.
6. - Prouver que ζ est de classe C^∞ sur D et donner, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $s \in D$, une expression de $\zeta^{(k)}(s)$ en fonction de s et de k.
   - Montrer que la fonction ζ est convexe.
7. Tracer la courbe représentative de ζ dans le plan.
8. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\psi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$.
   (a) Quel est l'ensemble de définition (noté D') de ψ ?
   (b) Montrer que
   $$\forall a > 0,\ \forall s \in [a, +\infty[,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \left|\psi(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^s}\right| \leq \frac{1}{(N+1)^a} .$$
   (c) En déduire que ψ est continue sur D'.
   (d) Par une méthode similaire, prouver que ψ est de classe C^∞ sur D'.
   (e) Pour $s \in D \cap D'$, exprimer $\psi(s)$ en fonction de $\zeta(s)$.
9. Cette fois-ci, $s \in \mathbb{C}$ et l'on pose $s = \sigma + it$, avec $(\sigma, t) \in \mathbb{R}^2$ (ce sont les notations de **Riemann**) et $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.
   (a) Montrer que cette série est absolument convergente sur le demi-plan $\{\sigma + it\ ;\ \sigma > 1\}$.
   (b) Démontrer que cette série diverge en tout point $s = \sigma + it$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $\sigma \leq 1$.