Fonctions vectorielles d'une variable réelle

1. (3)

   (a) On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

   (b) On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, la valeur de $f^n(x)$.

   (c) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

2. (4)

   (a) Énoncer le théorème des accroissements finis.

   (b) Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a; b]$ et que f est dérivable sur $]a; x_0[$ et sur $]x_0; b[$
   Démontrer que, si f' admet une limite en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

   (c) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

   Indication: on pourra considérer la fonction g définie par: $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

3. (43) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
   On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

   (a) i. Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).

   ii. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.

4. (47)

   (a) Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

   i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le sens géométrique de la somme de Riemann $R_n(f) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$?

   Illustrer par un dessin soigné.

   ii. Démontrer, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

   (b) Déterminer la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{3n^2 + k^2}$.

5. (56) On considère la fonction H définie sur $]1; +\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\ln t}$.

   (a) Montrer que H est C^1 sur $]1; +\infty[$ et calculer sa dérivée.

   (b) Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.

   (c) En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

6. Soit $u,\ v,\ w$ des fonctions de classe C^2 sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a, b \in I$.
   On suppose que $\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0$

7. Montrer que pour tout entier naturel n, $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\dfrac{\pi}{2})$. Donner une formule analogue pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ de sin.

8. Soitu, v, w des fonctions de classe C^1 sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. On note f la fonction $f = det(u, v, w)$. Montrer que f est de classe C^1 sur I et donner sa dérivée.
   Même question avec la fonction $g = u \wedge (v \wedge w)$, et avec la fonction $h = < u + v, w >$

9. Calculer la dérivée $n$ème de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

10. Montrer que la fonction f =Arctan est de classe C^∞ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)} = (n-1)! \cos^n(f) \sin\Big(n(\dfrac{\pi}{2} + f)\Big)$

11. Soit f_n la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f_n(x) = (x^2 - 1)^n$. Montrer que $\forall x \geqslant 1, \forall k \in \mathbb{N}^*,\ f_n^{(k)}(x) \geqslant 0$

12. (a) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^n sur $[a, b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
    $$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$
    (Formule de Taylor lagrange)
    (b) Soit E un espace vectoriel, et $F : [a, b] \to E$ une application de classe C^n sur $[a, b]$, $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$ telle qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in]a, b[,\ \|f^{(n+1)}(t)\| \leqslant M$.
    Montrer que $\|F(b) - F(a) - (b-a)F'(a) - ... - \dfrac{(b-a)^n}{n!} F^{(n)}(a)\| \leqslant M\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ (Inégalité de Taylor Lagrange
    (c) Démontrer l'inégalité : $\forall x \geqslant 0,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$

13. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x > 0,\ (e^{-1/x})^{(n)} = e^{-1/x} P_n(\dfrac{1}{x})$
    (b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$, et $f(x) = e^{-1/x}$ pour $x > 0$. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(0) = 0$.
    (c) Construire une fonction g non nulle, C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x$ tel que $|x| \geqslant 1,\ g(x) = 0$.

14. Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim -\frac{\ln n}{n^2}$.

15. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé. Montrer que son polynôme dérivé est lui aussi scindé.

16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1
    (a) Montrer que si f' est bornée sur $\mathbb{R}$ alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
    (b) Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} |f'(x)| = +\infty$ alors f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

17. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application dérivable.
    (a) Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$
    (b) Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

18. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application convexe croissante et non constante. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$