Fonctions de plusieurs variables

1. (33) On pose $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.
 - (a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
 - (b) Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
 - (c) f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

2. (52) (a) Prouver que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
 - (b) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
 - i. Quel est le domaine de définition de f ? Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
 - ii. Justifier l'existence et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 - iii. Justifier l'existence et donner la valeur de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
 - iv. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

3. (57) (a) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
 - i. Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
 - ii. Donner la définition de " f différentiable en $(0, 0)$ ".

(b) On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

 - i. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
 - ii. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

4. (58) (a) Soit E et F deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit $a \in E$ et soit $f: E \rightarrow F$ une application. Donner la définition de " f différentiable en a ".

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n et soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .
 On pose : $\forall x \in E, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $\forall (x, y) \in E \times E, \|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.
 On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.
 Soit $B: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E .

 - i. Prouver que $\exists C \in \mathbb{R}^+ \forall (x, y) \in E \times E, |B(x, y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty$.
 - ii. Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

5. Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ par :
 - (a) $f(x, y) = \varphi(x + y)$
 - (b) $f(x, y) = \varphi(x^2 + 3xy)$
 - (c) $f(x, y) = \varphi(\cos(x) + \sin(y))$

6. Étudier si les fonctions suivantes sont continues, différentiables, de classe C^1
 - (a) $f: (x, y) \rightarrow \begin{cases} x \sin \frac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
 - (b) $f: (x, y) \rightarrow \begin{cases} x^\alpha y^\beta & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont dans }]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ avec α et β réels.
 - (c) $f: (x, y) \rightarrow \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ \varphi'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$ où $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
 On pourra montrer que $f(x, y) = \int_0^1 \varphi'(x + t(y - x)) dt$
 - (d) $f: (x, y) \rightarrow \text{Max}(x, y)$

7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

A quelle condition f_α est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

8. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ montrer que les applications suivantes sont différentiables sur E et donner leur différentielle en tout point :
- $f : X \rightarrow X^p$ où $p \in \mathbb{N}^*$.
 - $f : E \rightarrow \mathbb{R}, X \rightarrow \det(X)$
9. Étudier la différentiabilité sur $GL_n(\mathbb{R})$ de l'application $f : X \rightarrow X^{-1}$.
10. Soit E un espace vectoriel euclidien.
- Montrer que $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R} x \mapsto \|x\|^2$ est de classe C^1 sur E et, en tout point x de E et pour tout h de E , exprimer $d_x\varphi(h)$ en fonction de x et de h .
 - Montrer que $N : E \rightarrow \mathbb{R} x \mapsto \|x\|$ est de classe C^1 sur $E \setminus \{0\}$ et, en tout point x de E et pour tout h de E , exprimer $d_xN(h)$ en fonction de x et de h .
11. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n (x \neq 0), \forall t \in \mathbb{R}_+, f(tx) = tf(x)$.
Montrer que f est linéaire.
12. Montrer que les applications suivantes sont bijectives de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, qu'elles sont différentiables et que leurs différentielles sont inversibles.
- $f(x, y) = (e^x - e^y, x + y)$
 - $f(x, y) = (x^3 + 3xe^y, y - x^2)$
13. Soit a un paramètre réel.
Quels sont les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2axy$?
14. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} (x, y) \mapsto f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.
Montrer que la restriction de f à toute droite passant par O admet un minimum en O , mais que f ne possède pas d'extremum en O .
15. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Soit $U = (\mathbb{R}^2 \cup \{(0, 0)\}) \times \mathbb{R}^*$. Pour $(x, y, z) \in U$, on pose $F(x, y, z) = f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$. Exprimer le laplacien ΔF de F à l'aide des dérivées partielles de f et déterminer les applications f de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que $\Delta F = 0$.
16. (a) Déterminer les fonctions f de classe C^1 de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = kf(x, y)$ (on pourra passer en polaires).
(b) On note $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 2y\}$. Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur U telles que $\forall (x, y) \in U, x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 4y^2$ (on pourra poser $u = x + 2y$ et $v = xy$)
17. (a) Montrer que l'application $(u, v) \rightarrow (ue^v, e^{-v})$ est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.
(b) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.
(c) Soient a et b deux réels. Déterminer une fonction linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = ax + by$ ($\mathcal{E}$).
(d) Déterminer toutes les fonctions $f \in C^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[, \mathbb{R})$ solutions de ($\mathcal{E}$)
18. Déterminer les extremums éventuels des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :
- $f(x, y) = x^2(1 + y) + y^3$
 - $f(x, y) = xe^y + ye^x$
 - $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 2y^3 + 3x^2$
19. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que la restriction de f à S est constante. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $df_{x_0} = 0$.
20. Déterminer les fonctions de $C^1(]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ à l'aide du changement de variables $x = u, y = uv$