Fonctions définies par une intégrale

1. (25)

   (a) Démontrer que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   (b) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2. (26) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

   (a) Justifier que I_n est bien définie.

   (b) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.

   (c) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

3. (29) On pose : $\forall\, x \in]0;+\infty[$ et $\forall\, t \in\,]0;+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

   (a) Démontrer que, $\forall\, x \in\,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

   (b) Démontrer que, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

   (c) Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

4. (30 partiel)

   (a) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

   (b) Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. %item

5. (49)Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

   (a) Énoncer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle I quelconque pour une série de fonctions $\sum f_n$.

   (b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!}e^{-t}$.

      i. Justifier que la suite (a_n) est bornée.

      ii. Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

      iii. Prouver que f: $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

   (c) i. Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}dt$.

      En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt$.

      ii. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n\,t^n}{n!}\,e^{-t}\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

6. (50) Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}dt$.

(a) Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
(b) Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
(c) Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

7. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^3+t^3}$
   (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) A l'aide du changement de variable $u = 1/t$, calculer $f(0)$.
   (c) Montrer que f est continue est décroissante.
   (d) Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.
8. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit f une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans E. On considère l'application g de $\mathbb{R}$ dans E définie par : $g : x \to \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$
   (a) Montrer que pour tout réel x, $g(x) = \int_0^1 f'(tx)dt$
   (b) Montrer que g est de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans E.
   (c) Calculer $g^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$
9. (a) Justifier que l'intégrale suivante est définie pour tout $x > 0$ $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$
   (b) Justifier la continuité de f sur son domaine de définition.
   (c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
   (d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et la limite de f en $+\infty$.
10. Soient $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u, v : I \to \mathbb{R}$ continues.Montrer que $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue.
11. Soit $\alpha > 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^\pi t^\alpha \cos^2(xt)dt$
12. (a) Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
    (b) Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Justifier que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
    (c) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $F'(x)$.
    (d) En déduire $F(x)$.
13. Pour $x > 0$ et $\alpha > 0$ exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t^\alpha}dt$ à l'aide de la fonction Γ
14. L'objectif de cet exercice est de calculer $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
    (a) Montrer que pour tout $t \in [0,n]$, $0 \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \leqslant \mathrm{e}.\mathrm{e}^{-t}$
    (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
    (c) Montrer : $\displaystyle\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = \ln n + \int_0^1 \frac{(1-u)^n-1}{u}\,\mathrm{d}u$
    (d) En déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$ où γ désigne la constante d'Euler.
    (e) Calculer $\Gamma'(2)$.
15. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $Lf(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$
    (a) Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-yt}dt$ converge pour $y > x$.
    (b) Quelle est la nature de l'ensemble de définition de Lf
    (c) On suppose f bornée. montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} Lf(x) = 0$