# Intégration

1. (28)*N.B : les deux questions sont indépendantes.*

   (a) La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

   (b) Soit $a$ un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

2. (29 partiel)On pose : $\forall\, x \in ]0;+\infty[$ et $\forall\, t \in\, ]0;+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ .

   (a) Démontrer que, $\forall\, x \in\, ]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in ]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

   (b) Démontrer que, $\forall\, x \in ]0;+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. (49 partiel) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

   (a) Énoncer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle $I$ quelconque pour une série de fonctions $\sum f_n$.

   (b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,+\infty[$ , $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!}e^{-t}$.

      i. Justifier que la suite $(a_n)$ est bornée.

      ii. Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

      iii. Prouver que $f$: $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ .

   (c) i. Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}dt$.

      En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, dt$.

4. Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :

   (a) $t \to \dfrac{1}{t\ln(t)}$ sur $[2,+\infty[$

   (b) $t \to \dfrac{1}{1+t^3}$ sur $]-1,+\infty[$

   (c) $t \to \dfrac{1}{e^t+t^2e^{-t}}$ sur $\mathbb{R}$

   (d) $t \to \dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ sur $]0,1[$

   (e) $t \to \sqrt{\ln\dfrac{1}{x}}$ sur $]0,1[$

   (f) $x \to \dfrac{\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}$ sur $]0,+\infty[$

   (g) $t \to \dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$

5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres réels $a$ et $b$ pour que les intégrales suivantes existent :

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a(t-1)^b}$

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a\mathrm{e}^{-t}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$

6. Condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ existe.

7. Soit $f : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.
   On suppose que $f$ est intégrable. Montrer $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

8. Existence et calcul des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x^2-1}}$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

9. Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f$ et $f'$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$ ; montrer que $f$ tend vers 0 en $+\infty$.

10. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 0$

11. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x^2} \frac{\sin^2 t}{t \ln t} dt$

12. Pour $a, b > 0$ avec $a \neq b$, calculer $I(a,b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$.

13. Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f^2$ et $f'^2$ sont intégrables. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

14. (a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$. Déterminer les limites des suites $\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right)$ et $\left(\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)$

    (b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ (on pourra s'intéresser à $I_{n+1} - I_n$)

    (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left( \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt \right) = 0.$

    (d) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

15. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ en procédant au changement de variable $t = \mathrm{e}^{-x}$.

16. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

    (a) Justifier l'existence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

    (b) Déterminer une relation de récurrence liant $I_n$ à $I_{n+1}$. En déduire une expression simple de $I_n$ en fonction de $n$.

    (c) Établir un lien entre $I_n$ et l'intégrale de Wallis : $\displaystyle\int_0^{\Pi/2} \cos^n(t) dt$.

17. Soit $0 < a < b$. On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

    (a) Justifier l'existence de $I$.

    (b) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{e^{-u}}{u} du$

    (c) Déterminer $I$.

18. (*) Donner la nature d el'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}$

19. (*) Soit $f$ une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et décroissante telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et est non nulle.

    (a) Montrer que pour tout $t > 0$ la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1}^{+\infty} f(nt)$ converge.

    (b) Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nt)$ quand $t \to 0^+$.