Normes, suites

1. (1) (a)On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
(b)Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \text{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. (38) On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
$\forall\, P \in E$, on pose $N_1(P) = \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max\limits_{0\le i\le n} |a_i|$ où $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.
(a) (i) Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
(ii) (pour les 5/2) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
(iii) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
(b) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k.
On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes?

3. (37) On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose, $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$.
   (a) i. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
      ii. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \le kN_\infty(f)$.
      iii. (pour les 5/2) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
   (b) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

4. (a) Montrer que l'application $(x, y) \to \operatorname*{Sup}\limits_{t\in[0,1]} |x + ty|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer la boule unité.

5. Montrer que l'application $(x, y) \to \displaystyle\int_0^1 |x + ty|\, dt$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$

6. Soit $(E, ||\ .\ ||)$ un espace vectoriel normé sur K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
a) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $||x|| + ||y|| \leqslant 2\text{Max}(||x + y||, ||x - y||)$
b) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

7. Soit E un evn. Soit (u_n) une suite de E qui converge vers a, et (v_n) une suite de E qui converge vers b.
Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, (u_n, v_n) est lié, alors (a, b) est lié

8. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose : $\|P\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| \qquad \|P\|_\infty = \max\{|a_0|, \dots, |a_n|\}$
$\|P\|_b = \max\{|P(t)| \text{ tq } 0 \le t \le 1\}$.
Montrer que ce sont des normes, et qu'elles sont deux à deux non équivalentes. (On considèrera $P_n(t) = (t-1)^n$ et $Q_n(t) = 1 + t + t^2 + \cdots + t^n$)

9. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose pour $P \in \mathbb{R}[X]$: $N_a(P) = |P(a)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)|\ dt$.Montrer que :
   (a) N_a est une norme.
   (b) N_0 et N_1 sont équivalentes.
   (c) Si $a, b \in [0, 1]$, alors N_a et N_b sont équivalentes.
   (d) Soit $P_n = (X/2)^n$. Déterminer pour quelles normes N_a la suite (P_n) est convergente et quelle est sa limite.
   (e) Si $0 \le a < b$ et $b > 1$ alors il n'existe pas de réel $k > 0$ tel que $N_b < k.N_a$.

10. E est l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme infinie $\|\ \|_\infty$.
   (a) Déterminer la distance de la suite constante égale à 1, notée e, au sous-espace vectoriel C_0 des suites réelles convergeant vers 0.
   (b) Déterminer la distance de la suite $u = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sous-espace vectoriel C des suites réelles convergentes.

11. Existe-t-il des suites
    - N'ayant aucune valeur d'adhérence ?
    - Ayant une seule valeur d'adhérence, et non convergentes ?
    - Ayant une infinité de valeurs d'adhérences ?

12. On note $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$.

    (a) Pour $f \in E$ on pose $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ Montrer que N est une norme sur E. Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

    (b) on pose $N'(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Montrer que N' est une norme et qu'elle est équivalente à N.

13. Déterminer, si elles existent, les limites des suites suivantes :
    (a) $u_n = \cos(n+1).e^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
    (b) $v_n = n^2 \sin\left(\ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right)\right)\left(e^{1/n} - 1\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
    (c) $w_n = \left(\cos(\dfrac{2}{\sqrt{n}})\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
    (d) $t_n = \sqrt{n}(2\ln(1+\sqrt{2n+1}) - \ln(2n+1))$ pour $n \in \mathbb{N}$.

14. **Théorème de Césaro** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim(u_n) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'alors $\lim \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k = \ell$.

    (a) Dans cette question on se place dans le cas $\ell = 0$. Soit alors $\varepsilon > 0$. En scindant la somme en deux parties autour d'un entier n_0 tel que $|u_{n_0}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, prouver le théorème dans ce cas.

    (b) Conclure dans le cas où ℓ est un réel quelconque.

    (c) Prouver le théorème dans le cas où $\ell = +\infty$.

    (d) Réciproque ?

    (e) **Applications**

    i. On définit la suite (x_n) par $x_0 > 0$ et pour tout entier n, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$
    Déteminer la limite de (x_n). Vérifier que la suite $(x_{n+1}^2 - x_n^2)$ tend vers une limite finie que l'on déterminera. En exprimant $x_n^2 - x_0^2$ comme une somme de $x_{k+1}^2 - x_k^2$, en déduire un équivalent de x_n.

    ii. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers ℓ. Montrer que la suite $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers ℓ

15. Étudier la convergence des suites suivantes :
    (a) (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{u_n}$
    (b) (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n$.
    (c) (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + n(-1)^n$.

16. Donner un équivalent simple des suites suivantes :
    (a) (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
    (b) (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$
    (c) (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
    (d) (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{n \ln n}$.
    (e) (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \text{Arctan}\sqrt{\dfrac{n+1}{n+3}}$.

17. (a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in [0,1],\ |e^t - 1 - t| \leqslant Mt^2$.

    (b) Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}} dx - \int_0^1 (1 + \frac{1}{n}\ln(1+x^2) dx\right|$ est un O de $\dfrac{1}{n^2}$

    (c) Déterminer les réels a et b tels que $\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}} dx = a + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$