TD Probabilités

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les réels a et k soient tels que la suite (p_n) définie, pour $n \geqslant 0$, par $p_n = k\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^n$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.

2. Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que X admet une espérance $E(X) = m$ et une variance $V(X) = \sigma^2$. On fixe $\alpha > 0$.
(a) Soit $\lambda \geqslant 0$. Démontrer que $P(X - m \geqslant \alpha) = P(X - m + \lambda \geqslant \alpha + \lambda)$.
(b) Vérifier que $E((X - m + \lambda)^2) = \sigma^2 + \lambda^2$.
(c) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $P(X - m \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{\alpha^2 + \lambda^2 + 2\lambda\alpha}$.
(d) En déduire que $P(X - m \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$
(e) Démontrer que $P(|X - m| \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{2\sigma^2}{\alpha^2 + \sigma^2}$.
(f) Quand obtient-on une meilleure inégalité que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev?

3. Un serrurier rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.
(a) Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
(b) En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

4. Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.
(a) Déterminer la loi de X.
(b) Montrer que X admet une espérance, et la calculer.
(c) On procède à l'expérience suivante : si X prend la valeur n, on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.
(d) On pose $Z = X - Y$. Donner la loi de Z et vérifier que Z et Y sont indépendantes.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires positives. On suppose que X et Y ont un moment d'ordre 1. Montrer qu'il en est de même des variables aléatoires :

$$Z = \max(X, Y) \qquad T = \sqrt{XY} \qquad U = \frac{XY}{X+Y}$$

6. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On note $\mathcal{L}^0$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et pour $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{L}^n$ l'ensemble des variables aléatoires ayant un moment d'ordre n.
(a) Montrer que $\forall x, y$ positifs, $0 \leqslant \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{1}{2}(x^n + y^n)$
(b) Montrer que si X et Y ont un moment d'ordre n, alors $X + Y$ aussi. En déduire que $\mathcal{L}^n$ est un sev de $\mathcal{L}^0$
(c) Démontrer que pour tout réel positif x, alors $0 \leqslant x^{n-1} \leqslant 1 + x^n$.
(d) Montrer que $\mathcal{L}^n$ est un sev de $\mathcal{L}^{n-1}$

7. **Démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass.**
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0,1]$.
On pose : $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

   (a) Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$

      i. Démontrer que pour tout $\alpha > 0$, $P(|S_n - nx| > n\alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$.

      ii. Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x).$$

   (b) i. Soit $\varepsilon > 0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(a,b) \in [0,1]^2$, $|a-b| \leqslant \alpha$ entraîne $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$, puis majorer $\left|f(\frac{k}{n}) - f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leqslant \alpha$.

      ii. Justifier que $\left|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha} (f(\frac{k}{n}) - f(x))P(S_n = k)\right| \leqslant 2\,\|f\|_\infty\, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.

      iii. Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout réel $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$, puis conclure.

8. Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui nŠont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.
Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.
On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in]0,1[$ et le produit B avec la probabilité $1-p$. On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z = max(X,Y)$.
a. On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X, la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z. Que représente cette variable aléatoire ?
On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
b. Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $[N = n]$ est réalisé ?
c. Déterminer la loi conjointe du couple (X,N).
d. En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.
e. Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
f. En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $Cov(X,N)$.
g. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S(k,x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $P(Z \leqslant k)$ en fonction de λ, $S(k,\lambda p)$ et $S(k,\lambda(1-p))$.