Probabilités

1. (112) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
(a) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
(b) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
(c) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$. .

2. (104) On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules. Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.
(a) Préciser les valeurs prises par X.
(b) i. Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
ii. Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
c) i. Calculer $E(X)$.
ii. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

3. (105) (a) Énoncer et démontrer la formule de Bayes.
(b) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés.
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
i. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?
ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé?
iii. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

4. (107) On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement " la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche ".
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.
(a) Calculer p_1.
(b) Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
(c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

5. (109) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.
(a) Déterminer la loi de X.
(b) Déterminer la loi de Y.

6. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ un ensemble de 3 éléments. Quelle est la tribu engendrée par $\{a, b\}$?

7. Soit $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ un espace probabilisé. Soit A un évènement de probabilité non nulle. P_A est la probabilité conditionnée par A. Donner une CNS sur A pour que $P_A = P$

8. Montrer que l'intersection de deux tribus sur l'ensemble Ω est une tribu sur Ω.
Que dire dans le cas d'une réunion de deux tribus de Ω ?

9. Soit Ω un ensemble dénombrable. On le munit de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et d'une probablité P.
Montrer qu'il est impossible que chaque point ait la même probabilité.
Est-il possible que tous les points de Ω aient une probabilité strictement positive ?

10. On tire 13 cartes d'un jeu de 52 cartes (un tirage sera nommé "main"). Quelles sont les probabilités suivantes :
(a) La main ne contient pas de carte rouge ?
(b) La main contient exactement 2 as et 3 rois ?
(c) La main contient au moins 2 as et 3 rois ?
(d) La main contient exactement 1 as et 3 cartes rouges ?

11. On considère que la probabilité de la naissance d'un garçon est égale à la probabilité de naissance d'une fille (donc 1/2). Mr X a deux enfants.
(a) Il présente à son meilleur ami son fils. Quelle est la probabilité que son second enfant soit une fille ?
(b) Quelle est la probabilité que son plus jeune soit une fille si son aîné est un garçon ?

12. On dispose de 3 cartons : le premier de ces cartons a ses deux faces rouges, le second a ses deux faces noires et le dernier a une face rouge et l'autre noire. On tire au hasard une carte. On la pose sur la table et la face visible est rouge. Quelle est la probabilité que l'autre face soit noire ?

13. On dispose de 2 urnes A et B. L'urne A contient 2 boules rouges et 4 noires. L'urne B contient 2 boules noires et 4 rouges. On choisit au hasard une urne et on effectue dans celle-ci une série de tirages avec remise. Quelle est la probabilité que la 3ème boule tirée soit noire sachant que les premières étaient noires elles aussi ?

14. On choisit au hasard un nombre dans $[[1, n]]$ où n est un entier naturel fixé. Soit $\delta \leqslant n$ un entier naturel non nul fixé, avec $\delta \leqslant n$.
On note A_δ l'évènement : "le nombre choisi est divisible par δ".
(a) Déterminer $P(A_\delta)$ lorsque δ divise n.
(b) Montrer que si $p_1, p_2, ..., p_k$ sont des diviseurs premiers de n et distincts 2 à 2 alors les évènements $A_{P_1}, ..., A_{P_k}$ sont indépendants.
(c) Notons D_n l'ensemble des éléments de $[[1, n]]$ premiers avec n. Déterminer $P(D_n)$.
(d) Retrouver l'expression de $\varphi(n)$ en fonction des diviseurs premiers de n, où φ est l'indicatrice d'Euler ($\varphi(n)$ est le nombre d'entiers dans $[[1, n]]$ premiers avec n).

15. On dispose de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n. L'urne numéro k contient k boules rouges et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, et sans savoir quel est son numéro, on effectue n tirages avec remise dans cette urne.
(a) Quelle est la probabilité qu'au tirage suivant, on tire une boule rouge sachant que les n premiers tirages ont donné une boule rouge ?
(b) Déterminer la limite de cette probabilité quand n tend vers $+\infty$

16. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges.
    (a) On effectue n tirages successifs avec remise dans l'urne.
        i. Quelle est la probabilité que le $k$ième tirage donne une boule blanche ?
        ii. Quelle est la probabilité que le nombre total de boules blanches tirées soit égal à p avec $0 \leqslant p \leqslant n$?
    (b) Reprendre les questions i. et ii. ci-dessus dans le cas d'un tirage sans remise.

17. On lance deux dés non truqués. On répète cette épreuve jusqu'à ce que le total des deux lancers soit 5 ou 7. le jeu s'arrête alors.
(a) Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête sur un 5 ?
(b) Quelle est la probabilité qu'il s'arrête sur un 7 ?
(c) Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

18. Un système a trois états notés A, B, S, et évolue de manière discrète aux temps n. L'état S est stable. L'état A au temps n évolue au temps $n+1$ soit en B soit en S avec équiprobabilité. De même l'état B au temps n évolue au temps $n+1$ soit en A soit en S avec équiprobabilité.
Notons A_n l'évènement : le système est dans l'état A au temps n,
B_n l'évènement : le système est dans l'état B au temps n
S_n l'évènement : au temps n le système est stabilisé (état S).
(a) Donner des relations de récurrence liant les probabilités que le système soit dans un état au temps $n+1$ en fonction des probabilités qu'il soit dans tel état au temps n.
(b) Quelle est la probabilité p_n qu'au temps n le système soit stabilisé, et déterminer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.
(c) Quelle est la probabilité que le système ne se stabilise pas ?