Réduction des endomorphismes

1. Déterminer les valeurs propres et sev propres de l'endomorphisme f dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 5 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -9 & 11 \\ 6 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ (c) $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 8 & -5 & 7 \\ 10 & -8 & 10 \end{pmatrix}$

2. (65) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
(a) Démontrer que $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
(b) Démontrer que $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, ($P$ polynôme annulateur de u)$\Longrightarrow$ (PQ polynôme annulateur de u)

3. (70) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
(a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable?
(b) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

4. (68)Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Démontrer que A est diagonalisable de trois manières (4 manières pour les 5/2) (i) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres, (ii) en utilisant le rang de la matrice, (iii) en calculant A^2.

5. (69) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.
(a) Déterminer le rang de A.
(b) Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable?

6. (71) Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.
(a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
(b) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A. Montrer alors **sans calcul** que A est diagonalisable.
La diagonaliser dans une base à déterminer.

8. Soit f un endomorphisme de E diagonalisable. Montrer que si f est nilpotent, alors f est nul.

9. Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que 0 est valeur propre de f^n pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 0 est valeur propre de f.

10. Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et I l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe sa primitive qui s'annule en 0. Montrer que si f est vecteur propre de I alors $I(f)$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre. Déterminer alors les valeurs propres de I.

11. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
(a) Justifier que tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre
(b) Observer que l'endomorphisme $P(X) \mapsto (X-1)P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ n'a pas de valeurs propres.

12. Calculer A^n dans les cas suivants :

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 5 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

13. Déterminer le polynôme minimal de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

14. Montrer qu'il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est X^2+1.

15. Parmi les matrices élémentaires $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, lesquelles sont diagonalisables ?

16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}A = 1$. Montrer que A diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{tr}A \neq 0$.

17. Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

18. Soient f, g endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que f et g commutent si et seulement si chaque sous-espace propre de f est stable par g.

19. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 3A^2 + A - 3I = 0$. Montrer que la trace de A est un entier positif.

20. Déterminer les sev stables par l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

21. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec pour tout $i, j,\ a_{i,j} > 0$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
(a) Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
(b) Justifier que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leqslant 1$.
(c) Quelles sont les valeurs propres de A de module 1 ?

22. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalisable, et $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer $M^k A = 0 \iff MA = 0$

23. Trouver toutes les matrices B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ avec $\mathrm{tr}(B) = 0$, lorsque $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

24. Soient f et g deux endomorphismes de E diagonalisables avec E de dimension finie.
(a) Montrer que f et g sont simultanément diagonalisables si, et seulement si, chaque sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.
(b) Montrer que f et g sont simultanément diagonalisables si, et seulement si f et g commutent

25. $*$ Soit $A \in GL_n(K)$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in K(X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$

26. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n tel que $u^2 = -Id_E$.
(a) Montrer que n est pair.
(b) Montrer que $\exists (x_1, x_2, ..., x_p) \in E^p$ / la famille $(x_1, x_2, ..., x_p, u(x_1), u(x_2), ..., u(x_p))$ soit une base de E.
(c) Calculer le polynôme caractéristique de u et montrer que $\mathrm{tr}\, u = 0$ et que $\det u = 1$.
Quelles sont les valeurs propres de u ?
(d) Donner une forme réduite remarquable de u en faisant apparaître E comme somme directe de plans stables par u.

27. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB = BA$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$
(a) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la matrice M^k
(b) En déduire pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ l'expression de $P(M)$ en fonction de P, P' et de A et B.
(c) Montrer M diagonalisable $\iff \begin{cases} A \text{ diagonalisable} \\ B = 0 \end{cases}$ *Pour le sens direct, on pourra montrer que si π est le polynôme minimal de M alors π et π' sont premiers entre eux*

28. (a) Comparer les produits de matrices par blocs (pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$) :
$\begin{pmatrix} XI_n - BA & B \\ O_{n,n} & XI_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_n & O_{n,n} \\ A & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & O_{n,n} \\ A & I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} XI_n & B \\ O_{n,n} & XI_n - AB \end{pmatrix}$.
Qu'en déduit-on de fameux ?
(b) Soit $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont même spectre.
Que penser des dimensions des sous-espaces propres respectivement relatifs à λ valeur propre de $u \circ v$ et de $v \circ u$? (on pourra par exemple étudier les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) .