Séries numériques

1. Etudier la convergence des séries de terme général :

   (a) $u_n = \dfrac{n}{(n+1)^2}$

   (b) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

   (c) $u_n = \dfrac{1}{n^2 \ln n}$

   (d) $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

   (e) $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

   (f) $u_n = n^{(-1+\frac{1}{n})}$

   (g) $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

   (h) $u_n = (1+\sqrt{n})^{-n}$

   (i) $u_n = \dfrac{1}{\ln(n!)}$

   (j) $u_n = \dfrac{1}{\cos(n^2+1)}$

   (k) $u_n = (1+\dfrac{1}{n^2})^n - 1$

   (l) $u_n = n^{-(\ln n)^\lambda}$ avec $\lambda > 0$

   (m) $u_n = \operatorname{Argch}\left(e^{1/n^\lambda}\right)$ avec $\lambda > 0$.

   (n) $u_n = \dfrac{\sin \ln n}{n}$ (**)

   (o) $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

2. (5) (a)On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (i) **Cas** $\alpha \leqslant 0$ En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (ii) **Cas** $\alpha > 0$ Étudier la nature de la série.

   Indication: On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

   (b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

3. (6) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.
   (a) Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge. **Indication**: écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

   (b) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

4. (7) (a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrer que:

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

   (b) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln n}$. ($i$ est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

5. (8) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) (i) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente. **Indication**: on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   (ii) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

   (b) (i) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   (ii) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

6. Soit (u_n) une suite réelle décroissante et positive. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$.
   Déterminer la nature de $\sum v_n$ en fonction de celle de $\sum u_n$.

7. Soit p un entier premier. Nature de la série de terme général u_n où $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est une puissance entière de } p \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$

8. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2 + 2n\cos a - \sin^2 a}$ avec $a \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ et calculer sa somme.

9. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1} \qquad \sum_{n\geqslant 2} \ln(1-\frac{1}{n^2}) \qquad \sum \frac{n}{n^4+n^2+1} \qquad \sum \frac{8}{(4n^2-1)(2n+3)}$

10. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les suivantes sont aussi convergentes : $\sum \max(u_n, v_n), \sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$

11. Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $nu_n \to 0$.

12. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.
a) On suppose qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que $u_n = O(v_n)$.
b) On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ avec $\alpha > 1$.
Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que $\sum u_n$ converge.

13. Soit (u_n) une suite positive. Montrer que les séries de termes généraux u_n, $\dfrac{u_n}{1+u_n}$, $\ln(1+u_n)$, sont de même nature.

14. Soit (a_n) une suite strictement positive, et $u_0 > 0$. On définit la suite (u_n) par $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$.
Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

15. Soit (u_n) une suite positive. Montrer $\displaystyle\sum \frac{1}{1+n^2 u_n}$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ diverge

16. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{Arctan}(n+a) - \mathrm{Arctan}(n)$ avec $a > 0$
Même question avec la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$

17. Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{a^n n!}{n^n}$
(a) Étudier la convergence de la série pour $a \neq e$
(b) Ici $a = e$ .montrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang. Conclure sur la convergence de la série.

18. Etudier la nature des séries suivantes :
$\displaystyle\sum \frac{\sin n}{n^2} \qquad \sum \frac{(-1)^n \ln n}{n} \qquad \sum \frac{\cos n^2\pi}{\ln n} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$

19. Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et (v_n) la suite définie pour $n \geqslant 2$ par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$
   (a) Montrer que $u_n \sim v_n$
   (b) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente $(n \geqslant 1)$
   (c) Montrer que la série $\sum v_n$ est divergente $(n \geqslant 2)$
   (d) Expliquer

20. a) Justifier la convergence de la série numérique $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{k}$. On pose $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$
b) Montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$
c) Déterminer un équivalent de R_n.
d) Donner la nature de la série de terme général R_n.

21. Soit $\alpha < 1$. Déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$