Séries de fonctions

1. (8) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

   (a) i. Démontrer que la série $\sum\limits_n (-1)^k u_k$ est convergente. **Indication**: on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   ii. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

   (b) i. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   ii. Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

2. (14) (a) Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

   (b) Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

   (c) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

3. (15) Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

   (a) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

   (b) Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

   (c) La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

4. (16) On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par:
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$.

   On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

   Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$, puis calculez $S'(1)$.

5. (17) Soit $A \subset \mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

   (a) Démontrer l'implication:

   $$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right)$$
   $$\Downarrow$$
   $$\left(\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\right)$$

   (b) On pose: $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in [0;+\infty[,\ f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$. $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

6. (18) On pose: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

   On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

   (a) Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

(b) i. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   ii. La fonction S est-elle continue sur D?

7. Étudier la convergence simple, normale, uniforme des séries de fonctions :

   (a) $\sum f_n$ où f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{1+n^2}$

   (b) $\sum f_n$ où f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$

   (c) $\sum f_n$ où f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$

   (d) $\sum f_n$ où f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^3x^2}$

   (e) $\sum f_n$ où f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ pour $n \geqslant 2$

8. On pose $u_0(x) = 1$ et $u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$ pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout entier naturel n. Montrer que la série de terme général u_n est normalement convergente.

9. Étudier selon les réels α la convergence normale sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum n^\alpha x^n(1-x)$

10. (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $S : x \to \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^x e^{-nx}$

    (b) Montrer que S est continue sur son ensemble de définition. Quelle est la limite de S en $+\infty$?

11. Soit $\psi(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}\right)$. Justifier l'existence et calculer $\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$

12. (a) Justifier la définition de la fonction $f : \begin{cases}]0,\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\cos^n x.\sin(nx) \end{cases}$

    (b) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,\pi[$. Calculer f' sous forme d'une somme infinie.

    (c) Montrer que $\forall x \in]0,\pi[,\ f'(x) = -1$ et en déduire f sur $]0,\pi[$

13. Montrer que la fonction $f : \begin{cases}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n} \end{cases}$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

    Calculer $f'(x)$ en utilisant 2 suites géométriques de raison xe^{ix}. En déduire que $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$

14. On pose $S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt}$ pour $t > 0$.

    (a) Justifier que S est définie et continue sur $]0,+\infty[$.
    (b) Étudier la limite de S en $+\infty$.
    (c) Établir que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
    (d) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t)$.

15. Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$

    (a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
    (b) Étudier la monotonie de S.
    (c) Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent de S en $+\infty$.
    (d) Déterminer un équivalent à S en 0.

16. On pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

    (a) Donner l'ensemble de definition de ζ
    (b) Étudier la continuité puis la dérivabilité de ζ
    (c) Donner la limite de ζ aux bornes de l'ensemble de définition.