Suites de fonctions

1. (9)
   (a) Soit X un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
   (b) On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}$.
      i. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
      ii. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
      iii. Soit $a>0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;+\infty[$?
      iv. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?
2. (11)
   (a) Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n)-f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
   (b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
      i. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
      ii. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.
3. (12)
   (a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a,b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
   (b) On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, x\in[0;1]$, $g_n(x)=x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?
4. (13)
   (a) Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
   On suppose que, pout tout $n\in\mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
   Démontrer que la fonction g est bornée.
   (b) On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par:
   $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } |x|\leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } |x|>\frac{1}{n} \end{cases}$
   Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
5. (10)On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}$.
   (a) Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.
   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.
6. (27) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$.
   (b) Soit $a\in\,]0;1[$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;1]$?
   (c) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
   (d) (pour les 5/2) Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7. Étudier la convergence (simple ou uniforme) de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants.

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = nx^2e^{-nx}$
   (e) $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^nx^2}$
   (f) $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
   (g) $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x^2e^{-\sin(x/n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (h) $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$: on étudiera la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ puis sur $]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$

8. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes sur l'intervalle I. On suppose que cette suite converge simplement vers f sur I. La fonction f est-elle croissante sur I ?

9. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, non nulle, telle que $f(0) = \lim\limits_{\infty} f = 0$. On note $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\ x \to f(nx)$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement et non uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

10. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2+1/n}$.
Montrer que chaque f_n est $\mathcal{C}^1$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

11. Soit X un ensemble et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction $f_n : X \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément sur X vers une fonction f. Montrer que la suite de fonctions $\left(\dfrac{f_n}{1+f_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers la fonction $\dfrac{f}{1+f^2}$

12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde bornée.
Montrer que la suite des fonctions $g_n : x \mapsto n\,(f(x+1/n) - f(x))$ converge uniformément vers f'.

13. Soit (P_n) une suite de polynômes qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

   (a) Montrer que f est polynomiale.
   (b) Montrer que la suite $(P'n)$ converge uniformément vers f'.

14. Soient (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f et g une fonction uniformément continue. Montrer que $(g \circ f_n)$ converge uniformément.

15. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(1) = 0$. Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = x^n f(x)$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

16. Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'elle converge uniformément vers une fonction f sur $]0,1[$. Montrer qu'elle converge uniformément sur $[0,1]$

17. Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues est elle-même uniformément continue.

18. Théorème de Dini
Soient des fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, la suite réelle $(f_n(x))$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite (f_n) est uniforme.

   (a) Justifier l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty$
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.
   (c) En observant que pour tout $p \leqslant n$, $f_n(x_n) \leqslant f_p(x_n)$, montrer que $\|f_n\|_\infty \to 0$ et conclure.

19. Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0,1/n]$ et $f(x) = 0$ sinon

   (a) Etudier la limite simple de la suite (f_n).
   (b) Calculer $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?
   (c) Etudier la convergence uniforme sur $[a,1]$ avec $a > 0$.