TP réduction des endomorphismes

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ; soit u un endomorphisme diagonalisable de E : on note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $n_1, n_2, ..., n_p$ les dimensions des sous-espaces propres respectifs.
   Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on note E_{λ_i} le sous-espace propre relatif à la valeur propre λ_i. On note $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = u \circ v\}$.

   (a) Vérifier que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

   (b) Montrer que $v \in C(u) \iff \forall i \in [\![1, p]\!],\ v(E_{\lambda_i}) \subset E_{\lambda_i}$.

   (c) En déduire la valeur de $\dim C(u)$.

   (d) On suppose que u a n valeurs propres distinctes.
   Montrer que la famille $(I, u, u^2, ..., u^{n-1})$ est libre (I représente Id_E).
   Décrire alors exactement l'ensemble $C(u)$.

2. (a) Soit A une matrice 2×2 ayant deux valeurs propres distinctes.
   Soit $\mathcal{R}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),\ B^2 = A\}$.
   Calculer $\mathrm{Card}\,\mathcal{R}(A)$. (On pourra utiliser les résultats du premier exercice).

   (b) Soit $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   En s'inspirant de la méthode précédente, caractériser
   $$\mathcal{R}(A') = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),\ B^2 = A'\}$$
   et donner une famille infinie d'éléments de $\mathcal{R}(A')$.

3. Suites à récurrence linéaire
   On étudie l'ensemble des suites réelles $u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+1} + 2u_n - 4n^2 + 10 \qquad (E')$$

   (a) Rechercher une solution particulière de (E')
   Montrer que l'on peut désormais ramener l'étude de (E) à celle d'une autre équation (E) dont on cherche maintenant l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions réelles.

   (b) Donner la structure de $\mathcal{S}$ et préciser sa dimension sur $\mathbb{R}$.

   (c) Donner une base de $\mathcal{S}$ et conclure sur l'ensemble des solutions de (E').